Marche aléatoire d'une souris

TS Spé Math

Fiche Professeur

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

But de l'activité : Le but de cette activité est d'étudier les lois des états successifs d'une chaîne de Markov (une marche aléatoire, proposée dans le document [3]) et de démontrer que cette loi a une limite. Elle est traitée dans l'esprit du nouveau programme de la spécialité mathématiques en Terminale S. Xcas a été choisi dans cette activité parce qu'il permet de faire des calculs exacts en nombres rationnels et de prouver que cette chaîne à une loi limite.

Compétences engagées :
- ✓ Modéliser une marche aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré,
- ✓ Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire,
- ✓ Écrire la matrice de transition d'une marche aléatoire,
- ✓ Comprendre et analyser un algorithme donné,
- ✓ Modifier un algorithme donné,
- ✓ Valider un algorithme simple.

Pré-requis :
- ✓ Connaître la notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- ✓ Connaître la notion de probabilité conditionnelle.
- ✓ Connaître la notion de matrice.
- ✓ Connaître le produit matriciel.

Matériels utilisés :
- ✓ La salle informatique.

Durée indicative : 1 heure

Noms des logiciels utilisés : *Xcas.*

Documents utiles à télécharger :
- ✓ La fiche Élève (pdf)
- ✓ Le fichier « Premières Lois » qui est un fichier-texte Xcas. Xcas étant ouvert, on le charge par simple copier-coller.

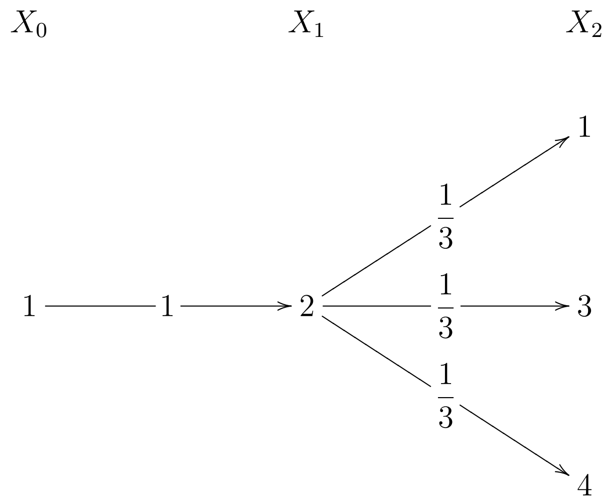
Déroulement de la séance : Suivre la fiche Élève, en salle informatique.

Solutions et commentaires :

1. Modélisation du début de la marche aléatoire

1.1 - À l'instant initial, la souris se trouve dans la case 1. Pour le probabiliste (nous sommes en train de définir un modèle), elle se trouve avec probabilité 1 dans la case 1. Par conséquent, elle se trouve dans la case 2, 3 ou 4 avec la probabilité 0. Cela donne : $\mathbb{P}[X_0 = 1] = 1$, $\mathbb{P}[X_0 = 2] = 0$, $\mathbb{P}[X_0 = 3] = 0$ et $\mathbb{P}[X_0 = 4] = 0$, soit $L_0 = [1, 0, 0, 0]$.

1.2 - Les lois respectives L_1 et L_2 des variables aléatoires X_1 et X_2 sont déterminées à l'aide de cet arbre pondéré :



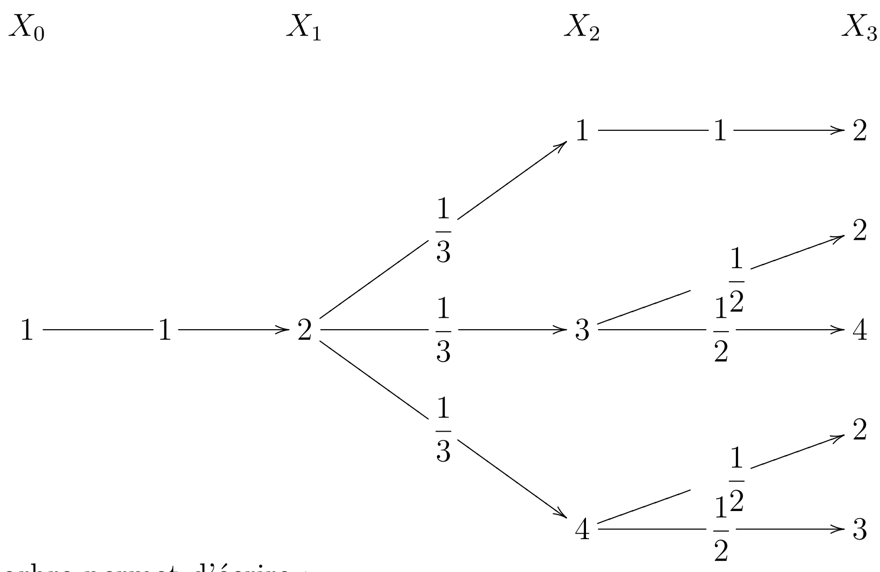
$\mathbb{P}_{[X_0=1]}[X_1 = 2] = 1$ car si la souris se trouve dans C_1 à l'instant initial, elle se déplace automatiquement (ou avec probabilité 1) vers C_2. Cela implique aussi les égalités

$$\mathbb{P}_{[X_0=1]}[X_1 = 1] = \mathbb{P}_{[X_0=1]}[X_1 = 3] = \mathbb{P}_{[X_0=1]}[X_1 = 4] = 0.$$

Remarque : Il est préférable de ne pas dessiner les branches dont un rameau est affecté de 0 car ces branches ne jouent aucun rôle dans la détermination des lois L_1, L_2, ...

Pour calculer la probabilité de l'événement $(X_1 = i)$, on additionne les probabilités des chemins qui vont de 0 à i (intervient ici l'additivité de la probabilité). La loi de X_1 est donc $L_1 = [0, 1, 0, 0]$.
De la même manière, on montre que la loi de X_2 est $L_2 = \left[\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$. Bien sûr, les élèves sont censés savoir que la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des rameaux (ce sont des produits de probabilités conditionnelles).

1.3 - La loi de X_3 est déterminée grâce à l'arbre pondéré suivant :



La lecture de l'arbre permet d'écrire :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_3 = 1] &= 0 \\
\mathbb{P}[X_3 = 2] &= 1 \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3} \\
\mathbb{P}[X_3 = 3] &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6} \\
\mathbb{P}[X_3 = 4] &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times 1 = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

La loi de X_3 est donc $L_3 = \left[0,\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right]$.

Remarque : On pourra faire constater aux élèves que la somme des probabilités des lois L_1, L_2 et L_3 vaut 1.

2. Calcul formel : loi de la variable aléatoire X_n

2.1 - La matrice de transition T de cette marche aléatoire est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les zéros traduisent le fait que la souris change de case à chaque pas. Il y a donc des zéros sur la diagonale principale. Les élèves sont évidemment sensés connaître la signification de $T_{i,j}$: quels que soient l'instant $n \geqslant 0$ et les états i et j, si $\mathbb{P}\left(X_n = i\right) > 0$, $\mathbb{P}_{(X_n=i)}\left(X_{n+1} = j\right) = T_{i,j}$.

2.2 - On trouve

$$\begin{aligned} L_0 * T &= [0,1,0,0] \\ L_0 * T^2 &= [\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}] \\ L_0 * T^3 &= [0,\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}] \end{aligned}$$

On constate que $L_1 = L_0 * T$, $L_2 = L_0 * T^2$ et $L_3 = L_0 * T^3$, ce qui permet de conjecturer la formule du calcul de L_n à partir de L_0 et de T que l'énoncé nous demande d'admettre.

3. Calcul formel : loi limite de la marche aléatoire

3.1 - On constate que le programme « Premières lois » produit 4 nuages de points.

✓ le premier nuage représente l'évolution de $\mathbb{P}\left(X_n = 0\right)$, n variant de 0 à 50. Ces points sont des étoiles rouges.

✓ le deuxième nuage représente l'évolution de $\mathbb{P}\left(X_n = 1\right)$, n variant de 0 à 50. Ces points sont des triangles bleus.

✓ le troisième nuage représente l'évolution de $\mathbb{P}\left(X_n = 2\right)$, n variant de 0 à 50. Ces points sont des signes plus bleus.

✓ le quatrième nuage représente l'évolution de $\mathbb{P}\left(X_n = 3\right)$, n variant de 0 à 50. Ces points sont des (pourtours de) carrés bleus.

On remarquera que les deux derniers nuages sont confondus car les cases 3 et 4 jouent des rôles identiques. C'est pourquoi on a l'impression qu'il n'y a que 3 nuages.

3.2 - Chaque nuage de points semble s'aligner sur une ligne horizontale quand n grandit. On peut donc conjecturer que les 4 suites

$$\left(\mathbb{P}\left(X_n = 0\right),\ n \geqslant 0\right),\ \left(\mathbb{P}\left(X_n = 1\right),\ n \geqslant 0\right),\ \left(\mathbb{P}\left(X_n = 2\right),\ n \geqslant 0\right) \text{ et } \left(\mathbb{P}\left(X_n = 3\right),\ n \geqslant 0\right)$$

sont convergentes. Comme la somme de ces suites vaut 1, si on note leurs limites $S(0)$, $S(1)$, $S(2)$ et $S(3)$, leur somme vaudra 1. De plus, une observation précise des nuages de points suggère que $S(3) = S(4) = 2S(1)$ et que $S(2) = 3S(1)$. On en déduit que

$$S(1) = \frac{1}{8},\quad S(2) = \frac{3}{8},\quad S(3) = S(4) = \frac{1}{4}$$

Si on appelle S la matrice-ligne $\left[\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$, on dit que S est la loi-limite de la marche aléatoire, ce que l'on note $L_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} S$. Pratiquement, cela veut dire que dès que n devient grand, la loi de X_n ne varie presque plus et peut être confondue avec S. Il est intéressant - ce n'est pas demandé - de calculer L_{50} ou de lire cette loi sur le graphique.

3.3 - La commande

```
matpow(T,n);
```

calcule évidemment la puissance n de la matrice T. Il est impressionnant - ce n'est pas demandé - de faire apparaître $L(n)$ à l'aide de la commande

```
expand(L(n));
```

On constate que $L(n)$ s'exprime à l'aide de suites géométriques de raison plus petite que 1 en valeur absolue. Xcas peut ainsi calculer la limite de $L(n)$. Cela prouve que les conjectures précédentes sont exactes.

Pour aller plus loin :

On peut calculer $S * T$. On trouve S. Cela veut dire que si la loi initiale était S au lieu de $[1, 0, 0, 0]$, les variables aléatoires X_n, $n \geqslant 0$ suivraient toutes la même loi, à savoir S. Mieux, la marche aléatoire serait un processus stationnaire (la notion - intuitive - de processus stationnaire n'est pas au programme).

Références

[1] B.O. SPÉCIAL N°8 DU 13 OCTOBRE 2011. *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique*
http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

[2] RAYMOND MOCHÉ *Introduction aux chaînes de Markov*
http://gradus-ad-mathematicam.fr/Exposes2.htm

[3] *Ressources pour la classe terminale générale et technologique Mathématiques Série S Enseignement de spécialité*
http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/62/6/ressource_specialite_v5_210626.pdf

[4] XCAS : AIDE :
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac_fr.html#doc