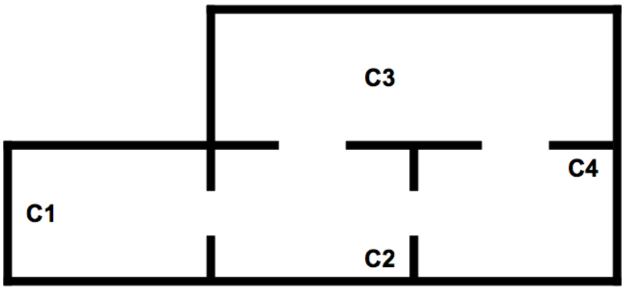
Marche aléatoire d'une souris

Fiche Élève

TS Spé Math

Une souris se déplace dans une cage comportant quatre compartiments C_1, C_2, C_3 et C_4, voir ci-contre. On suppose que la souris se trouve au départ dans le compartiment C_1 et qu'elle change de compartiments n fois successivement, n étant un entier naturel supérieur ou égal à 1.



Lorsque la souris se trouve dans un compartiment ayant k portes, elle choisit l'une des portes de manière équiprobable, donc avec la probabilité $\frac{1}{k}$.

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on appelle X_n le numéro du compartiment dans lequel se trouve la souris après n déplacements. Cela définit des variables aléatoires $X_0, X_1, X_2, \ldots$ qui peuvent prendre les valeurs 1, 2, 3 et 4. Ainsi, $X_0 = 1$ puisque la souris part du compartiment C_1.

La loi de la variable aléatoire X_n sera représentée par la matrice (1×4)

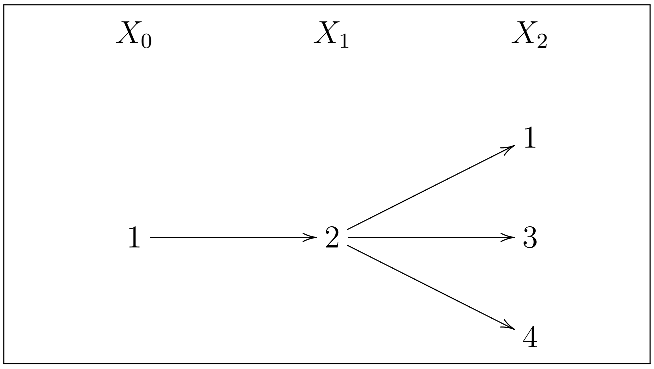
$$L_n = [\mathbb{P}(X_n = 1), \mathbb{P}(X_n = 2), \mathbb{P}(X_n = 3), \mathbb{P}(X_n = 4)]$$

1. Modélisation du début de la marche aléatoire

1.1 - Justifier l'égalité $L_0 = [1, 0, 0, 0]$, qui donne la loi initiale de la marche aléatoire.

1.2 - Pondérer l'arbre ci-contre afin de déterminer les lois respectives L_1 et L_2 des variables aléatoires X_1 et X_2.
On remarquera qu'il est inutile de dessiner les branches dont un rameau est affecté de 0.

1.3 - Déterminer L_3.



2. Calcul formel : loi de la variable aléatoire X_n

2.1 - Écrire la matrice de transition T de cette marche aléatoire. On rappelle que la suite des puissances de T est définie par récurrence par

$$T^1 = T \text{ et } \forall n \geqslant 2, \quad T^n = T^{n-1} * T.$$

2.2 - Ouvrir *Xcas*, puis saisir et exécuter les commandes suivantes :

```
L0:=[1,0,0,0];
T:=matrix([0,1,0,0],[1/3,0,1/3,1/3],[0,1/2,0,1/2],[0,1/2,1/2,0]);
L0*T;
L0*T^2;
L0*T^3;
```

On enregistrera ce fichier en le nommant « L1L2L3 ». On le retrouvera en cherchant « L1L2L3.xws ». Comparer ces résultats avec les lois L_1, L_2 et L_3. Que constate-t-on ?

Dans la suite, on admettra que pour tout entier $n \geqslant 1$, $L_n = L_0 * T^n$

3. Calcul formel : loi limite de la marche aléatoire

Pour étudier l'évolution de la loi L_n de X_n quand n varie, représentons L_n par les 4 points d'abscisse n et d'ordonnées respectives $\mathbb{P}(X_n = 1)$, $\mathbb{P}(X_n = 2)$, $\mathbb{P}(X_n = 3)$ et $\mathbb{P}(X_n = 4)$. Pour cela, ouvrir *Xcas* et recharger ou recopier le programme « Premières lois » suivant :

```
souris():={
local L,T,N,P,Q,R,S,n,j;
L:=[1,0,0,0];
T:=matrix([0,1,0,0],[1/3,0,1/3,1/3],[0,1/2,0,1/2],[0,1/2,1/2,0]);
n:=50;
P:=affichage(point(L[0]*i),rouge+point_etoile);
Q:=affichage(point(L[1]*i),bleu+point_triangle);
R:=affichage(point(L[2]*i),bleu+point_plus);
S:=affichage(point(L[3]*i),rouge+point_carre);
for(j:=1;j<=n;j++){
L:=L*T;
P:=P,affichage(point(j+L[0]*i),rouge+point_etoile);
Q:=Q,affichage(point(j+L[1]*i),bleu+point_triangle);
R:=R,affichage(point(j+L[2]*i),bleu+point_plus);
S:=S,affichage(point(j+L[3]*i),rouge+point_carre);
}
DispG P,Q,R,S;
}:;
```

3.1 - Exécuter « Premières lois ». Que produit-il ?

3.2 - Quelle conjecture peut-on faire ? Donner une interprétation probabiliste de cette conjecture.

3.3 - Pour confirmer la conjecture précédente à l'aide de *Xcas*, ajouter les commandes suivantes au fichier « L1L2L3 » :

```
supposons(n,integer);
L(n):=L0*matpow(T,n);
S:=limite(L(n),n,+infinity);
```

Exécuter cette commande et interpréter le résultat obtenu.

On dit que la marche aléatoire considérée a une loi-limite $S = \left(\frac{1}{8},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.