Problèmes d'arpenteurs

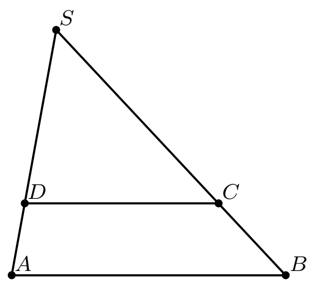
JA 2015

P. Lapôtre

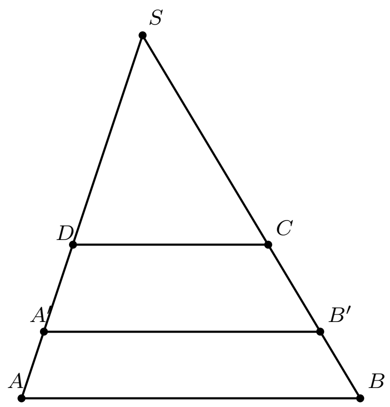
Présentation [1] :
Le livre « Histoires de géomètres. . . et de géométrie » (Éditions Le Pommier), écrit par Jean-Louis Brahem, architecte, apporte, sur des problèmes de géométrie, un éclairage différent de celui que l'on rencontre habituellement dans les manuels de mathématiques pour le collège et le lycée.
L'ambition de cet atelier est d'étudier quelques-uns des problèmes présentés dans cet ouvrage en proposant des justifications accessibles au plus grand nombre.

I.- Partager, par un segment parallèle à l'une de ses bases, un triangle en deux surfaces égales.

SAB est un triangle. On cherche $D \in [SA]$ et $C \in [SB]$, tels que $(DC)//(AB)$ de sorte que l'aire du triangle SCD soit égale à celle du trapèze $ABCD$.



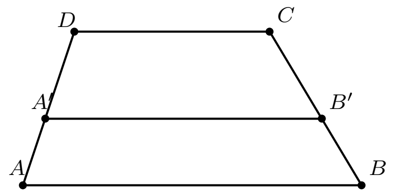
II.- Partager, par deux segments parallèles à l'une de ses bases, un triangle en trois surfaces égales.



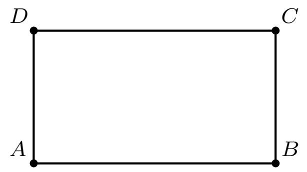
Remarque : Le trapèze $ABCD$ est, dans ce cas, un trapèze babylonien. Il est partagé par le segment $[A'B']$, parallèle aux deux bases, en deux trapèzes de même aire.

1. Thème : Mathématiques et autres Sciences

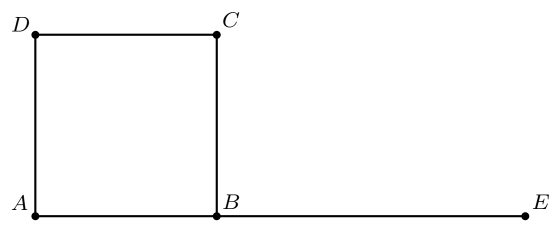
III.- Trapèze babylonien.
Étant donné un trapèze $ABCD$ avec $(AB)//(DC)$, on cherche $A' \in [AD]$ et $B' \in [BC]$ avec $(A'B')//(AB)$ de sorte que les trapèzes $ABB'A'$ et $A'B'CD$ aient la même aire.



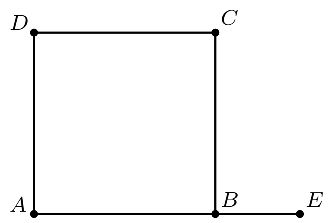
IV.- Quadrature d'un rectangle.
Construire un carré ayant la même aire qu'un rectangle donné.



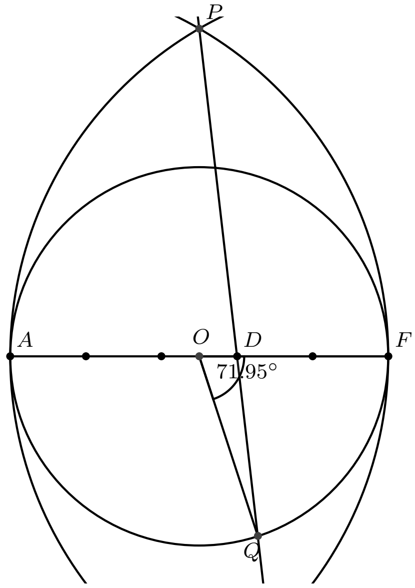
V.- Un carré de côté c étant donné, construire un rectangle de même aire dont la longueur L est donnée. $L \geqslant c, \quad BE = L$



VI.- Un carré de côté c étant donné, construire un rectangle de même aire dont la largeur l est donnée. $0 < l \leqslant c, \quad BE = l$



VII.- Le pentagone du bijoutier.
Un jardinier désire créer un massif en forme de pentagone régulier inscrit dans un cercle. Il utilise pour son tracé la méthode du bijoutier.
« Le bijoutier trace un cercle, il divise son diamètre en cinq, puis il trace deux arcs de cercles centrés sur ses extrémités et de rayon égal au diamètre du cercle. Il joint leur intersection à la deuxième marque et ainsi trouve le côté du pentagone »



Le ministère de la défense des États-Unis a la forme d'un pentagone régulier de 280 m de côté. Il est inscrit dans un cercle de rayon r vérifiant :

$$280^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 72° \quad \text{sachant que} \cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{on en déduit que}$$

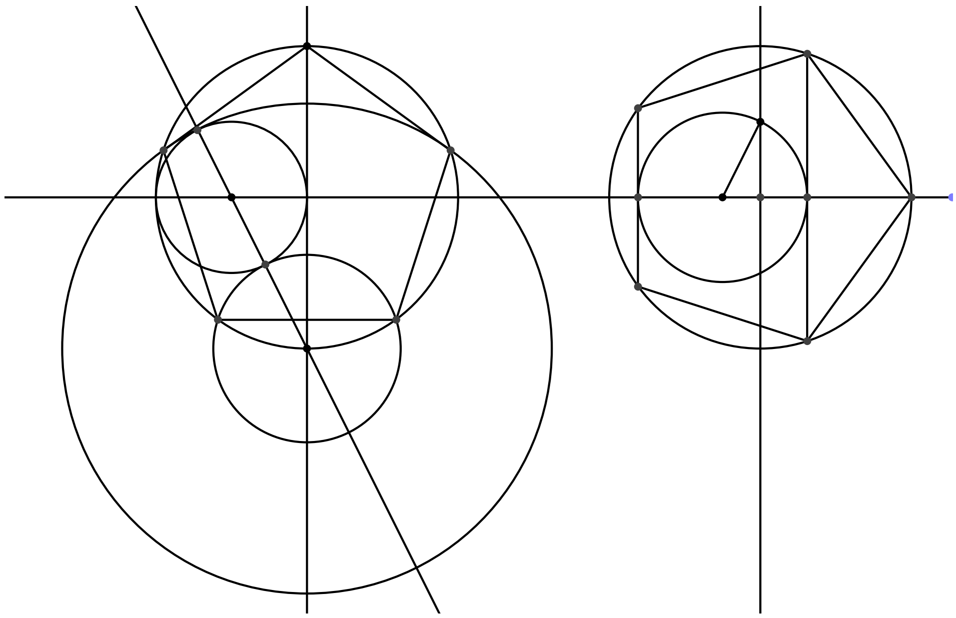
$$280^2 = r^2\left(2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$

$$280^2 = r^2\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

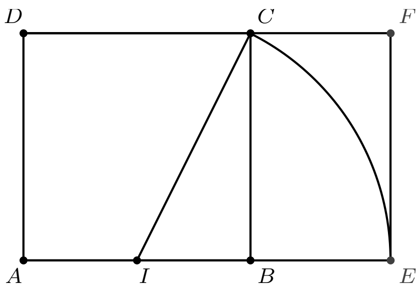
Soit $r \approx 238,1822$ m.
Pour un cercle d'un tel rayon, en prenant la méthode du bijoutier, on obtient un côté c vérifiant :

$$\begin{aligned} c^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 71,95° \\ &= r^2(2 - 2\cos 71,95°) \end{aligned}$$

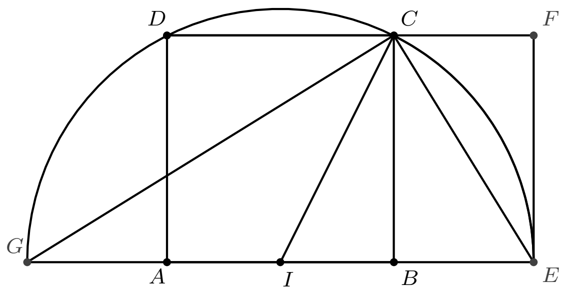
Ce qui donne $c \approx 279,8318$ m. Il manquerait 16,82 cm.
Deux méthodes pour une construction exacte :



VIII.- Rectangle d'or, équerre d'argent.
$ABCD$ est un carré de côté 1.
I est le milieu de $[AB]$.
E est le point de (AB), sur la demi-droite d'origine B ne contenant pas A, tel que $IE = IC$.
F est l'intersection de (DC) et de la perpendiculaire à (AB) passant par E.
$AEFD$ est un rectangle appelé *rectangle d'or*.



En effet, $IC^2 = IB^2 + BC^2$ soit $IC^2 = \dfrac{1}{4} + 1 = \dfrac{5}{4}$, d'où $IC = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, comme $IE = IC$ et $AI = \dfrac{1}{2}$, on a : $\quad AE = AI + IC = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,\quad$ on reconnait le *nombre d'or*.
Le rapport *longueur* sur *largeur* dans le rectangle $AEFD$ est bien φ, d'où son nom.
Le nombre d'or vérifie $\varphi^2 - \varphi = 1$ soit, $\varphi = \dfrac{1}{\varphi - 1}$ ce qui donne : $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{AB}{BE}$.
« AE est à AB ce que AB est à BE ».
On peut retrouver ce résultat en considérant le demi-cercle de centre I d'origine E, passant par C.
On note G l'intersection de ce demi-cercle avec (AB).

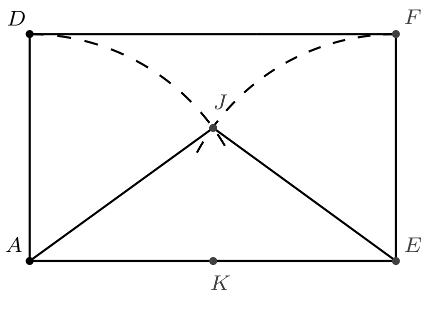


Dans le triangle rectangle ECG, $[CB]$ est la hauteur issue de C. On a :

$$CB^2 = GB \times BE \text{ or } CB = AB \text{ et } GB = AE$$

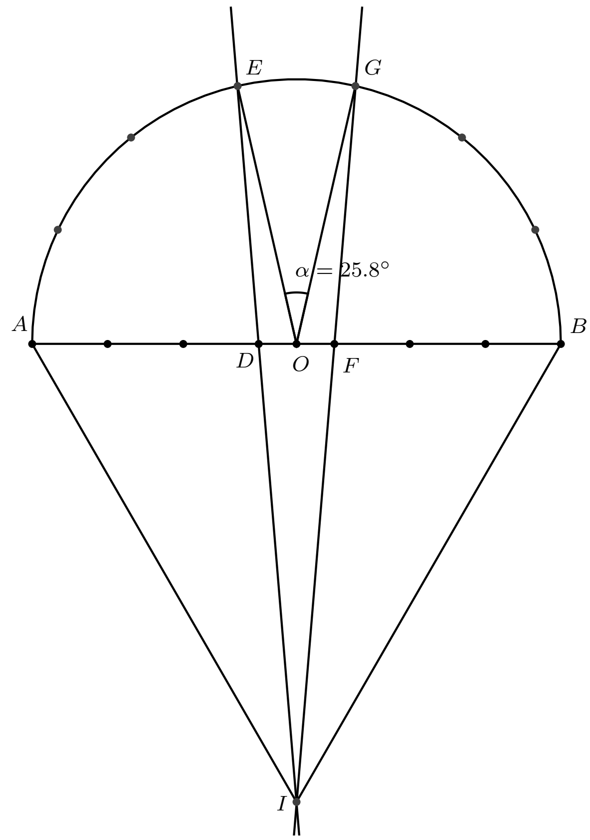
d'où $AB^2 = AE \times BE$.

Les arcs de cercles de centres respectifs E et A, de rayon 1 se coupent à l'intérieur du rectangle $AEFD$ en J.



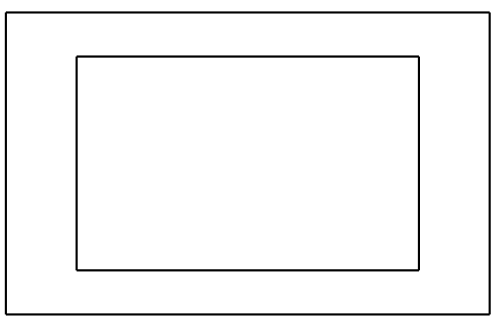
Le triangle isocèle AEJ est une représentation de l'*équerre d'argent*. C'est elle qui permet le tracé d'un pentagone régulier.

IX.- Méthode approximative pour partager un angle plat en sept parties égales.
Jadis utile pour tracer le chevet d'une abbatiale à sept quartiers.

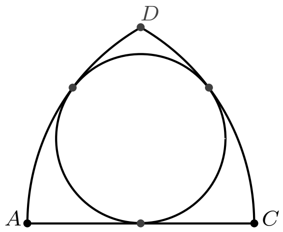


Le diamètre $[AB]$ d'un demi-cercle de centre O est partagé en sept parties égales. Pour cela, on a placé six marques sur le segment $[AB]$. On note D et F les troisième et quatrième marques.
Dans le demi-plan de frontière (AB) ne contenant pas le demi-cercle, on trace deux arcs de cercles de centres respectifs A et B, de rayon AB. Ils se coupent en I.
Les droites (ID) et (IF) coupent le demi-cercle en E et G.
Alors, l'angle $\widehat{EOG} \approx 25,8°$, peu différent de $\dfrac{180°}{7}$.

X.- Le cloître rectangulaire
À l'intérieur d'un cloître, un espace rectangulaire doit être aménagé. Il est prévu une zone rectangulaire centrale engazonnée, entourée d'une allée à bords parallèles. On désire que l'allée et le pré central aient la même aire.
Cet équilibre, espère-t-on, sera propice à la méditation.
À l'intérieur d'un rectangle, tracer un rectangle aux côtés parallèles au premier dont le centre (intersection des diagonales) est confondu avec celui du premier et dont l'aire est la moitié de celle du rectangle initial. On n'utilisera que les outils de l'arpenteur du Moyen Âge : piquets, ficelle.



XI.- Rosace entre deux arcs et un linteau.
Un segment $[AC]$ est donné. On trace les arcs de cercles de rayon AC, de centres respectifs A et C.
On note D l'un des points d'intersection des deux arcs.
Tracer un cercle tangent aux deux arcs et au segment $[AC]$.



XII.- Partager, par un segment issu d'un sommet, un quadrilatère quelconque en deux surfaces égales.
$ABCD$ est un quadrilatère. On cherche un point F, sur $[AD]$ ou sur $[DC]$, tel que $[BF]$ partage le quadrilatère en deux surfaces de même aire.