Deux modélisations de la gestion des entrées-sorties d'un hôpital

Auteur : Raymond Moché

Les situations simples sont faciles à modéliser, une modélisation unique s'imposant toujours. En général, ce n'est pas le cas. Ci-dessous, nous examinons la modélisation de la gestion des entrées/sorties d'un service d'hôpital, problème présenté dans [2], pp. 8-10, à l'occasion de la rentrée 2012, en Spécialité Mathématique de TS. Ce problème est complexe. La preuve en est que la solution apportée dans [2] est inacceptable, voir ci-dessous. Nous proposons deux solutions qui paraissent convenables tout en étant radicalement différentes. La première est appelée *déterministe* car elle n'utilise aucun concept du Calcul des Probabilités, au contraire de la seconde [a], appelée *probabiliste* parce qu'elle utilise des chaînes de Markov.

Nous ne traitons pas la question du choix parmi les modèles obtenus. Vaste problème !

a. Plutôt technique, niveau Maîtrise de mathématiques.

Table des matières

1 Position du problème

Dans la division

1. Quelques problèmes faisant apparaître des matrices,

le document Ressources ([2]) présente aux pages 8-10 sous l'intitulé

3. Gestion des admissions et sorties dans un hôpital

un problème intéressant dont la modélisation est plutôt maltraitée. Nous détaillons ci-dessous une modélisation déterministe et une modélisation probabiliste qui paraissent acceptables toutes les deux. Commençons par rappeler le texte du document [2] :

On estime que les patients admis dans un certain service d'un hôpital peuvent se trouver dans l'un des 4 *états suivants :* 1. *Soins réguliers,* 2. *Chirurgie,* 3. *Soins intensifs,* 4. *Sortie.*

Cette estimation est décrite par le tableau suivant, dans lequel sont indiquées les probabilités de passage d'un des états à un autre dans un intervalle de 24 *heures*[a]*(probabilités obtenues par modélisation des fréquences observées sur une longue période).*

Tableau de circulation des malades entre les états :

	1. *Soins réguliers*	2. *Chirurgie*	3. *Soins intensifs*	4. *Sortie*
1. *Soins réguliers*	0.6	0.2	0	0.2
2. *Chirurgie*	0.1	0	0.8	0.1
3. *Soins intensifs*	0.5	0	0.33	0.17
4. *Sortie*	0	0	0	1

Ce tableau se lit de la manière suivante : un malade se trouvant un jour en soins réguliers a la probabilité $0,6$ *de se trouver le lendemain en soins réguliers,* $0,2$ *de se trouver en chirurgie, une probabilité nulle de se trouver en soins intensifs et la probabilité* $0,2$ *de sortir, etc. Les informations chiffrées précédentes peuvent être stockées sous la forme d'un tableau (matrice) à* 4 *lignes et* 4 *colonnes*[b] *:*

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.33 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Supposons qu'un certain jour, la distribution des patients suivant les quatre états possibles s'écrive $X = (12, 5, 6, 3)$*. Le lendemain, la nouvelle distribution* $X' = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ *des nombres de malades par état d'hospitalisation (les* m_i*) est obtenue grâce au système suivant :*

$$\begin{cases} m_1 &= 12\cdot 0,6 + 5\cdot 0,1 + 6\cdot 0,5 + 3\cdot 0 \\ m_2 &= 12\cdot 0,2 + 5\cdot 0 + 6\cdot 0 + 3\cdot 0 \\ m_3 &= 12\cdot 0 + 5\cdot 0,8 + 6\cdot 0,33 + 3\cdot 0 \\ m_4 &= 12\cdot 0,2 + 5\cdot 0,1 + 6\cdot 0,17 + 3\cdot 1 \end{cases}$$

qui donne $X' = (10.7, 2.4, 6, 3.9)$*. Ce résultat (dans lequel on ne doit pas se formaliser de trouver des dixièmes d'êtres humains*[c]*) peut se traduire par l'égalité matricielle suivante :* $X' = X\cdot M = (12, 5, 6, 3)\cdot M$*. Supposons qu'au jour* 0*, dix patients soient admis en soins réguliers et qu'il n'y ait aucun patient en cours de traitement. On note* $X_0 = (10, 0, 0, 0)$ *la répartition des malades le jour* 0 *et* X_k *la répartition des malades au* $k^{\text{ème}}$ *jour,* k *entier positif. Supposons également que* 10 *patients soient admis chaque jour, etc*

a. Ces probabilités de passage d'un état dans un autre sont des notions de la théorie des chaînes de Markov. Ce n'est pas dit et ne peut pas être dit à cet endroit dans [2] car tout ce qui concerne le Calcul des probabilités est regroupé plus loin. La matrice M n'est pas stochastique. Le lecteur n'a qu'à se débrouiller.

b. qui est typiquement une matrice de transition d'une chaîne de Markov.

c. Si, on se formalise : on ne comprend pas. J'ai dû dire ce genre d'ânerie il y a très longtemps quand j'étais professeur débutant.

Le problème posé est évidemment de savoir comment vont évoluer les effectifs de chaque état. On peut considérer que la modélisation de la gestion des entrées/sorties des patients proposée dans [2] est terminée[1]. Suivent des calculs intéressants qui suggèrent une stabilisation des effectifs dans différents états.

1. On peut passer au traitement mathématique du modèle.

2 Modélisation déterministe

Nous allons nous intéresser aux effectifs moyens des 4 divisions [2] du service considéré. À l'instant $n \geqslant 0$, ces effectifs moyens sont notés $m_{n,1}$, $m_{n,2}$, $m_{n,3}$ et $m_{n,4}$, rassemblés dans le vecteur m_n suivant :

$$m_n = [m_{n,1}, m_{n,2}, m_{n,3}, m_{n,4}]$$

On part de

$$m_0 = [10, 0, 0, 0] \tag{2}$$

On estime que m_{n+1} se déduit de m_n et du tableau de circulation des malades suivant [3] :

	1. Soins réguliers	2. Chirurgie	3. Soins intensifs	4. Sortie
1. Soins réguliers	0.6	0.2	0	0.2
2. Chirurgie	0.1	0	0.8	0.1
3. Soins intensifs	0.5	0	0.33	0.17
4. Sortie	0	0	0	0

noté plus simplement

$$M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.33 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

comme suit : pour $i, j = 1, 2, 3, 4$, l'effectif moyen de la division i au jour n contribue dans le rapport $t_{i,j}$ à l'effectif moyen de la division j au jour $n+1$. Cette contribution sera donc $t_{i,j} \cdot m_{i,n}$. L'effectif moyen de la division j au jour $n+1$ est la somme des contributions des effectifs moyens des divisions 1, 2, 3 et 4 au jour n (plus 10 si $j = 1$ puisque 10 patients intègrent chaque jour la première division). Cela se traduit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} m_{n+1,1} & = & m_{n,1} \cdot 0,6 + m_{n,2} \cdot 0,1 + m_{n,3} \cdot 0,5 + m_{n,4} \cdot 0 + 10 \\ m_{n+1,2} & = & m_{n,1} \cdot 0,2 + m_{n,2} \cdot 0 + m_{n,3} \cdot 0 + m_{n,4} \cdot 0 \\ m_{n+1,3} & = & m_{n,1} \cdot 0 + m_{n,2} \cdot 0,8 + m_{n,3} \cdot 0,33 + m_{n,4} \cdot 0 \\ m_{n+1,4} & = & m_{n,1} \cdot 0,2 + m_{n,2} \cdot 0,1 + m_{n,3} \cdot 0,17 + m_{n,4} \cdot 0 \end{cases}$$

Cette écriture est assez rébarbative. En notation matricielle, c'est plus simple :

$$m_{n+1} = m_n \cdot M + m_0 \tag{4}$$

Ceci termine la modélisation déterministe annoncée. On pourra consulter dans [2] le calcul des effectifs moyens des 4 divisions au cours des 28 premiers jours, qui semble montrer que m_n converge quand $n \to +\infty$. Il y aurait donc une stabilisation des effectifs moyens, ce qui est très intéressant.

On déduit par récurrence de (4) que

$$m_n = m_0 \left(I + M + M^2 + \cdots + M^n \right) \tag{5}$$

3 Modélisation probabiliste

La modélisation qui suit suppose connues les généralités sur les chaînes de Markov (marches aléatoires) et sur l'espérance mathématique.

2. Nous disons « division » au lieu de « état » pour éliminer toute allusion aux chaînes de Markov.
3. Cette modélisation suit fidèlement [2], à part que l'on s'intéresse à des effectifs moyens. Si un patient est à l'état 0 au jour n, on n'en parle plus le jour suivant.

3.1 Modélisation du parcours aléatoire d'un patient à l'hôpital

Pour cela, on introduit une chaîne de Markov $\mathscr{X} = (X_0, X_1, X_2, \ldots)$ d'espace des états $\mathscr{E} = \{1, 2, 3, 4\}$ de loi initiale $L_0 = (1, 0, 0, 0)$ et de matrice de transition T [4] définie par

$$T = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0.5 & 0 & 0.33 & 0.17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Cette chaîne de Markov modélise la marche aléatoire dans $\mathscr{E}$ d'un patient qui est admis en « Soins réguliers » au jour 0. Nous voulons savoir où il se trouve à l'instant $n \geqslant 1$. Pour cela, nous définissons le vecteur $Y_n = [Y_{n,1}, Y_{n,2}, Y_{n,3}, Y_{n,4}]$ de longueur 4 constitué de 3 zéros et de 1 un, dont la $i^{\text{ème}}$ composante vaut 1 si le patient se trouve à l'état i et vaut 0 sinon. Ses composantes sont des variables aléatoires. Calculons leurs espérances [5] :

$$\begin{aligned} E(Y_{n,i}) &= 0 \cdot P(Y_{n,i} = 0) + 1 \cdot P(Y_{n,i} = 1) \\ &= P(Y_{n,i} = 1) \\ &= P(X_0 = 1, X_n = i) \\ &= P(X_0 = 1) \cdot P(X_n = i / X_0 = 1) \\ &= T^n(1, i) \end{aligned}$$

L'espérance de Y_n est le vecteur $[E(Y_{n,1}), E(Y_{n,2}), E(Y_{n,3}), E(Y_{n,4})]$, soit

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= [T^n(1,1), T^n(1,2), T^n(1,3), T^n(1,4)] \\ E(Y_n) &= L_0 \cdot T^n \end{aligned} \tag{7}$$

3.2 Position des 10 premiers patients à l'instant n

10 patients arrivant le jour 0, on va avoir besoin de 10 chaînes de Markov. Comme d'autres patients viendont les jours suivants, supposons tout de suite que l'on dispose d'une suite $(\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2, \mathscr{X}_3, \ldots)$ de chaînes de Markov analogues à $\mathscr{X}$ (même espace des états $\mathscr{E}$, même matrice de transition T, même loi initiale L_0). Nous garderons les notations précédentes en ajoutant un indice p quand on parle de $\mathscr{X}_p$ [6].

À l'instant n, les effectifs des 4 états dus aux 10 patients arrivés le jour 0 est

$$R_{0,n} = Y_{(1,n)} + Y_{(2,n)} + \ldots + Y_{(10,n)} \tag{8}$$

3.3 Position des $10\,(n+1)$ premiers patients à l'instant n

À l'instant n, seuls $10\,(n+1)$ patients se trouvent à l'hôpital. La contribution aux états du système à l'instant n des 10 patients qui arrivent à l'instant 1 est

$$R_{1,n} = Y_{(11,n-1)} + Y_{(12,n-1)} + \ldots + Y_{(20,n-1)}$$

4. T est obtenu à partir de M en en modifiant la dernière ligne pour les besoins de la modélisation probabiliste. Quand un patient se trouve dans l'état 4, dans la modélisation probabiliste, il reste ensuite dans cet état alors qu'il n'est plus compté dans la modélisation de [2] ou dans la modélisation déterministe, parce que la dernière ligne de M est nulle. Les patients ainsi négligés au fur et à mesure se retrouvent dans la dernière colonne du tableau de la page 10 de [2]. Dans la modélisation probabiliste, l'état 4 est manifestement un état absorbant dont on pourrait estimer le temps d'atteinte, la loi et l'espérance.

5. La formule (7) est même valable pour $n = 0$ en convenant que T^0 est la matrice-unité I de dimension 4.

6. Y_n deviendra $Y_{(p,n)}$.

et ainsi de suite jusqu'à la contribution des patients qui arrivent à l'instant n qui est

$$R_{n,n} = Y_{(10n+1,0)} + Y_{(10n+2,0)} + \ldots + Y_{(11n,0)} = [10, 0, \ldots, 0]$$

Finalement, l'occupation des 4 états du service à l'instant n est décrite par le vecteur aléatoire [7]

$$O_n = R_{0,n} + R_{1,n} + \cdots + R_{n,n} \tag{9}$$

(9) termine la modélisation probabiliste de la gestion des entrées/sorties d'un service de l'hôpital.

3.4 Occupations moyennes des 4 états à l'instant n

Comme dans toute modélisation probabiliste, on ne peut espérer de résultats certains, mais seulement des résultats en moyenne, par exemple des lois, des espérances, des variances, *etc.* Calculons la plus simple de ces valeurs moyennes, à savoir l'espérance de O_n [8]. L'espérance de la somme de variables aléatoires étant la somme de leurs espérances, on déduit de (7), (8) et (9) que [9]

$$E\left(R_{0,n}\right) = 10 \cdot L_0 \cdot T^n \tag{10}$$

De même,

$$E\left(R_{1,n}\right) = 10 \cdot L_0 \cdot T^{n-1}, \ \ldots, \ E\left(R_{n-1,n}\right) = 10 \cdot L_0 \cdot T, \ E\left(R_{n,n}\right) = [10, 0, \ldots, 0] = 10 \cdot L_0 \cdot I$$

ce qui donne finalement d'après (9) :

$$\begin{aligned} E\left(O_n\right) &= 10 \cdot L_0 \cdot T^n + \cdots + 10 \cdot L_0 \cdot I \\ E\left(O_n\right) &= 10 \cdot L_0 \left(I + T + T^2 + \cdots + T^n\right) \end{aligned} \tag{11}$$

La somme des 4 composantes de O_n et de $E\left(O_n\right)$ vaut $10\,(n+1)$, donc $E\left(O_n\right)$ ne converge certainement pas quand $n \to +\infty$. Mais on peut faire la conjecture que ses 3 premières composantes convergent quand $n \to +\infty$ tandis que la quatrième tend vers $+\infty$.

4 Choix d'un modèle

C'est un problème ouvert. On ne sait pas comment les matrices M et T ont été choisies. Cela pourrait donner des pistes. Le modèle déterministe paraît satisfaisant mais ce n'est qu'une apparence. En effet, que veut dire *effectif moyen* ? Nous ne saurions en donner une définition ! Aussi, le modèle probabiliste paraît plus solide. Néanmoins, les modèles probabilistes ne donnent jamais les bonnes réponses. Par exemple, un bon modèle devrait permettre de dire si la taille de l'hôpital est suffisante. Le modèle probabiliste dira au mieux « Elle est suffisante avec telle probabilité ».

Finalement, on peut valider un modèle en en tirant des prévisions. Si elles se révèlent convenables, le modèle est bon. Sinon, on le rejette. Il y a une théorie de la validation des modèles.

Références

[1] B.O. spécial n°8 du 13 octobre 2011. *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique* http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

7. Ce vecteur aléatoire a 4 composantes entières.
8. Il s'agit de la moyenne ou espérance mathématique relativement à une loi de probabilité.
9. Ces espérances n'ont aucune raison d'être entières.

[2] *Ressources pour la classe terminale générale et technologique Mathématiques Série S Enseignement de spécialité*
http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/62/6/ressource_specialite_v5_210626.pdf

[3] Raymond Moché *Introduction aux chaînes de Markov*
http://gradus-ad-mathematicam.fr/Exposes2.htm