# Introduction aux chaînes de Markov

Lycée

**pour les professeurs**

Auteur : Raymond Moché

## Table des matières



**Mots-clefs :** chaînes ou processus de Markov, espace des états, loi initiale, lois instantanées, matrice de transition, matrice stochastique, probabilité de passage d'un état à un autre, état absorbant, règle de multiplication des probabilités le long d'un chemin, temps d'arrêt, temps de retour, temps d'atteinte.

# 1 Introduction

## 1.1 Pourquoi ce papier ?

Il est destiné aux professeurs de lycée à l'occasion de la rentrée 2012. En effet, en Spécialité Mathématiques de la Terminale S, apparaissent, sans être nommées (sauf par exemple dans [2], p. 51), des *chaînes de Markov*. Ce sujet, qui élargit considérablement le domaine des *suites de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées*, permet de traiter de très nombreux nouveaux problèmes (par exemple des marches aléatoires ou le modèle de diffusion d'Ehrenfest) au moyen notamment de simulations et de calcul matriciel. L'intérêt est donc double, en Calcul des probabilités et en Algorithmique.

### 1.2 Notations

• $\mathscr{X} = (X_0, X_1, \ldots)$ : chaîne de Markov

• $\mathbb{P}$ est la probabilité de l'espace de probabilité sur lequel les variables aléatoires $X_0, X_1, \ldots$ sont définies.

• $\mathscr{E} = (1, 2, \ldots, t)$ : espace ou ensemble des états de la chaîne de Markov

• $i, j, i_0, i_1, \ldots$ : états de la chaîne de Markov

• $t$ : nombre d'états de la chaîne

• $\mathscr{L}_n$ : loi sur $\mathscr{E}$ de la variable aléatoire $X_n$, identifiée à $L_n = (L_n(1), L_n(2), \ldots, L_n(t))$

• $T = (p(i,j))$ : matrice de transition de $\mathscr{X}$

• $p(i,j)$ : probabilité de passage de l'état $i$ à l'état $j$

• $p^{(n)}(i,j)$, $n \geqslant 2$ : élément générique de la matrice $T^n$

• $n$ est habituellement l'instant présent du processus (par opposition au passé ou au futur).

### 1.3 Avertissement

En principe, cet exposé est facile. Les obscurités ou difficultés éventuelles ne sont pas nécessairement du fait de l'auteur. Il faut aussi tenir compte

- ✓ du manque de connaissances supposé du lecteur. Par exemple, on ne peut pas parler correctement de la loi d'une variable aléatoire car c'est une mesure. Le Calcul des probabilités est basé sur l'intégrale de Lebesgue (voir par exemple [5]). Toute théorie restreinte basée sur l'intégrale de Riemann, les sommes et les séries conduit à des difficultés insurmontables, même au niveau de l'enseignement au lycée. On triche donc. Ci-dessus, on a confondu $\mathscr{L}_n$ et $L_n$. C'est un moindre mal.
- ✓ de l'ambigüité modélisation/mathématiques. Les chaînes de Markov sont des objets mathématiques parfaitement définis. On les utilise comme modèle. Plaquer un modèle sur un phénomène réel est plutôt un acte de foi. On peut être convaincu ou non. La distinction modélisation/mathématiques n'est pas toujours claire dans le papier car tout est imbriqué.
- ✓ de la lourdeur des notations et des conditionnements. Il est tentant d'oublier qu'on ne peut conditionner que par un événement de probabilité $> 0$ car la théorie des chaînes de Markov est connue : on sait que ça marche. Nous n'avons pas cédé à la tentation.

## 2 Définition des chaînes de Markov

### 2.1 Généralités, vocabulaire et notations de base

**Définition 1** *On appelle matrice stochastique toute matrice carrée $T$ de réels $\geqslant 0$ dont la somme des éléments sur chaque ligne vaut 1.* □

**Exemple 1**

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \quad \triangle$$

Les éléments d'une matrice stochastique appartiennent donc à l'intervalle $[0, 1]$. Il n'est pas très utile de s'appesantir sur les matrices stochastiques en soi. Voici une propriété simple :

**Exercice 1** *Démontrer que toute les puissances d'une matrice stochastique sont des matrices stochastiques.* $\triangle$

**Solution :** On démontrera que le produit de deux matrices stochastiques de même taille est une matrice stochastique puis on fera une récurrence. $\blacksquare$

**Définition 2** *Soit $\mathscr{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans l'ensemble $\mathscr{E} = (1, 2, \ldots, t)$. On dit que $\mathscr{X}$ est une chaîne de Markov d'espace des états $\mathscr{E}$, de loi initiale $\mathscr{L}_0$ sur $\mathscr{E}$ et de matrice de transition $T$, $T$ étant une matrice stochastique $(t \times t)$ dont les coefficients seront notés $p(\cdot\,,\cdot\,)$ si*

✓ *$\mathscr{L}_0$ est la loi suivie par $X_0$,*

✓ *quel que soit l'entier $n \geqslant 0$ et quels que soient les états $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i$ et $j$ tels que $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j / X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\right) = p(i, j). \quad \square \tag{1}$$

• La condition $\mathbb{P}\left(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i\right) > 0$ assure évidemment que la probabilité conditionnelle (1) a bien un sens.

• $p(i, j)$, élément générique de la matrice de transition $T$ s'appelle *probabilité de transition de l'état $i$ à l'état $j$*. (2) nous dit que $p(i, j)$ est une probabilité conditionnelle (si $i$ est un état visité, c'est à dire s'il existe un instant $n$ tel que $\mathbb{P}\left(X_n = i\right) > 0$, ce que l'on peut évidemment toujours supposer). Ce n'est pas une probabilité sauf si l'on se réfère à la notion de loi conditionnelle. La terminologie est trompeuse.

• On devrait évidemment se poser le problème de l'existence de tels objets mathématiques. C'est trop difficile pour ce papier, voir [4], pp. 127-128 : *Chaînes de Markov homogènes.*

La propriété de Markov - égalité (1) - porte sur un conditionnement par l'instant présent (l'instant $n$) et tous les instants passés, s'il y en a (si $n \geqslant 1$). Voici une propriété de conditionnement par l'instant présent seulement :

**Théorème 1** *Soit $\mathscr{X}$ une chaîne de Markov d'espace des états $\mathscr{E}$, de loi initiale $\mathscr{L}_0$ sur $\mathscr{E}$ et de matrice de transition $T$. Alors, quels que soient les états $i$, $j$ et l'entier $n \geqslant 0$ tels que $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j / X_n = i\right) = p(i, j). \quad \square \tag{2}$$

Au lieu du théorème 1, nous allons plutôt démontrer le théorème plus général 2, dans lequel on conditionne par le présent (l'instant $n$) et une partie quelconque du passé.

**Théorème 2** *Soit $\mathscr{X}$ une chaîne de Markov d'espace des états $\mathscr{E}$, de loi initiale $\mathscr{L}_0$ sur $\mathscr{E}$ et de matrice de transition $T$, $n$, $n_1, \ldots, n_p$, où $p \geqslant 0$, des instants tels que $0 \leqslant n_1 < \cdots < n_p < n$, $i_1, \ldots, ip$, $i$ des états tel que $\mathbb{P}\Big(X_{n_1} = i_1, \ldots, X_{n_p} = i_p, X_n = i\Big) > 0$. Alors,*

$$\mathbb{P}\Big(X_{n+1} = j / X_{n_1} = i_1, \ldots, X_{n_p} = i_p, X_n = i\Big) = p(i, j). \quad \square \tag{3}$$

Nous ferons dériver le théorème 2 de l'importante règle de multiplication des probabilités le long d'un chemin.

## 2.2 Règle de multiplication des probabilités le long d'un chemin

Cette règle permet souvent d'éviter les conditionnements et leurs contraintes.

**Théorème 3** *Pour tout entier $n \geqslant 0$ et quels que soient les états $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i_n$,*

$$\mathbb{P}\left(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right) = L_0(i_0) \cdot p(i_0, i_1) \cdot p(i_1, i_2) \cdots p(i_{n-1}, i_n). \tag{4}$$

*Si de plus $\mathbb{P}\left(X_0 = i_0\right) > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n / X_0 = i_0\right) = p(i_0, i_1) \cdot p(i_1, i_2) \cdots p(i_{n-1}, i_n). \tag{5}$$

*Plus généralement, pour tous entiers $m \geqslant n \geqslant 0$ et quels que soient les états $i_n, i_{n+1}, \ldots, i_{m-1}, i_m$,*

$$\mathbb{P}\left(X_n = i_n, \ldots, X_m = i_m\right) = L_n(i_n) \cdot p(i_n, i_{n+1}) \cdot p(i_{n+1}, i_{n+2}) \cdots p(i_{m-1}, i_m). \tag{6}$$

*Si de plus $\mathbb{P}\left(X_n = i_n\right) > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_{n+1}, \ldots, X_m = i_m / X_n = i_n\right) = p(i_n, i_{n+1}) \cdot p(i_{n+1}, i_{n+2}) \cdots p(i_{m-1}, i_m). \quad \square \tag{7}$$

**Démonstration :** Si $n = 1$, l'égalité

$$\mathbb{P}\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1\right) = L_0(i_0) \cdot p(i_0, i_1)$$

est trivialement vraie si $L_0(i_0) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) = 0$ puisqu'alors le deuxième membre est nul ainsi que le premier puisque

$$\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1\right) \subseteq \left(X_0 = i_0\right) \Rightarrow \mathbb{P}\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1\right) \leqslant L_0(i_0) \Rightarrow \mathbb{P}\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1\right) = 0$$

Sinon, on peut conditionner et utiliser la propriété (2) :

$$\mathbb{P}\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1\right) = \mathbb{P}(X_0 = i_0) \cdot \mathbb{P}\left(X_1 = i_1 / X_0 = i_0\right) = L_0(i_0) \cdot p(i_0, i_1)$$

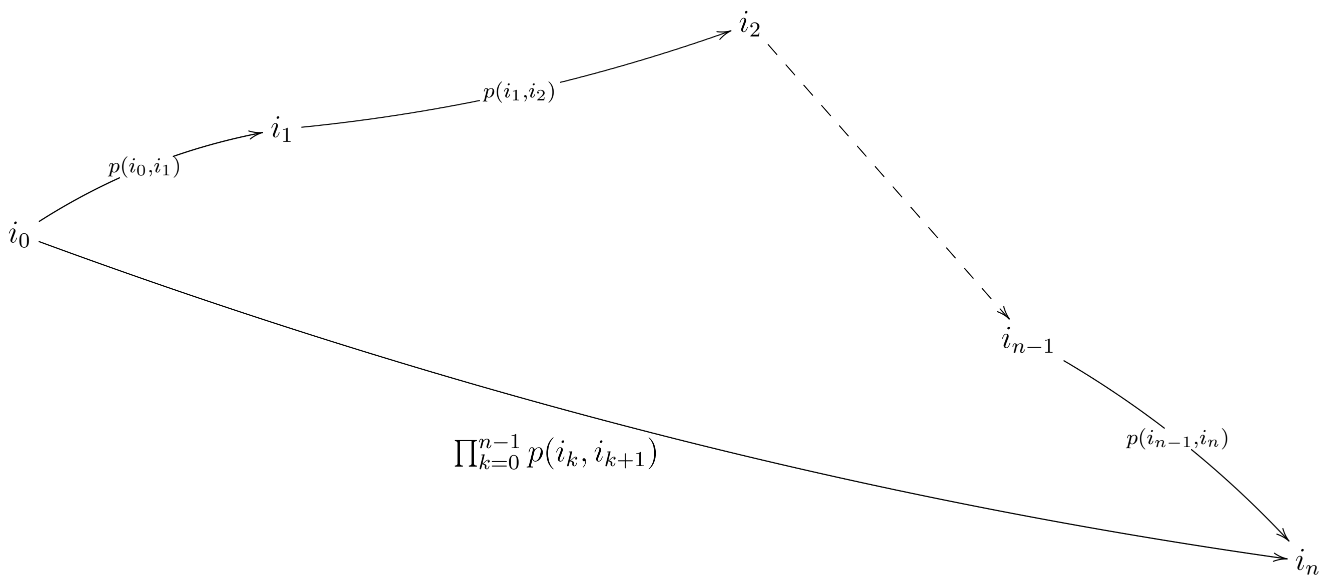
Supposons maintenant que pour un certain entier $n \geqslant 1$, on ait établi que pour toute suite d'états $i_0, \ldots, i_n$,

$$\mathbb{P}\left(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right) = L_0(i_0) \cdot p(i_0, i_1) \cdot p(i_1, i_2) \cdots p(i_{n-1}, i_n)$$

Soit une suite quelconque d'états $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1}$. Si $\mathbb{P}\left(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right) = 0$, on démontre comme précédemment que l'égalité

$$\mathbb{P}\left(X_0 = i_0, \ldots, X_{n+1} = i_{n+1}\right) = p(i_n, i_{n+1}) \cdot \mathbb{P}\left(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right) \tag{8}$$

est vérifiée. Sinon, en conditionnant par l'événement $\left(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n\right)$, on retrouve de nouveau (8). On peut ensuite appliquer l'hypothèse de récurrence et terminer cette récurrence.
(5) découle de la définition de la probabilité conditionnelle ; (6) et (7) se démontrent comme (4) et (5). ■




• (4) montre que la probabilité de tout événement attaché à une chaîne de Markov est calculable à partir de sa loi initiale $\mathscr{L}_0$ et de sa matrice de transition $T$. Il suffit d'additionner les probabilités des chemins qui composent cet événement, d'après l'additivité de la probabilité.
• (4) s'applique dans tous les cas, y compris s'il s'agit d'une chaîne de Markov dont l'état initial n'est pas aléatoire (cas où $L_0$ comprend un seul 1 et des 0 : c'est le cas de la souris de l'exemple (2) où $L_0 = [1, 0, 0, 0]$). Si le 1 se trouve en $i^{\text{ème}}$ position, on obtiendra :

$$\mathbb{P}\left(X_1 = i_1,\, \ldots,\, X_n = i_n\right) = p(i, i_1)\cdot p(i_1, i_2)\cdots p(i_{n-1}, i_n)$$

**Démonstration du théorème 2**

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j / X_{n_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{n_p} = i_p,\, X_n = i\right)$$

$$\begin{aligned}
&=^{(1)} \quad \frac{\mathbb{P}\left(X_{n_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{n_p} = i_p,\, X_n = i,\, X_{n+1} = j\right)}{\mathbb{P}\left(X_{n_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{n_p} = i_p,\, X_n = i\right)} \\
&=^{(2)} \quad \frac{\sum \mathbb{P}\left(X_0 = j_0,\, \ldots,\, X_{n-1} = j_{n-1},\, X_n = i,\, X_{n+1} = j\right)}{\mathbb{P}\left(X_{n_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{n_p} = i_p,\, X_n = i\right)} \\
&=^{(3)} \quad \frac{\sum L_0(j_0)\cdot p(j_0, j_1)\cdots p(j_{n-1}, i)\cdot p(i, j)}{\mathbb{P}\left(X_{n_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{n_p} = i_p,\, X_n = i\right)} \\
&=^{(4)} \quad p(i, j)\cdot \frac{\sum \mathbb{P}\left(X_0 = j_0,\, \ldots,\, X_{n-1} = j_{n-1},\, X_n = i\right)}{\mathbb{P}\left(X_{n_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{n_p} = i_p,\, X_n = i\right)} \\
&=^{(5)} \quad p(i, j)
\end{aligned}$$

*Justification du calcul :*

• $=^{(1)}$ provient de la définition de la probabilité conditionnelle.

• Dans $=^{(2)}$, le numérateur de la fraction précédente est remplacé par une sommation sur tous les états $j_0, \ldots, j_{n-1}$ tels que $j_{n_1} = i_1, \ldots, j_{n_p} = i_p$. Cette sommation provient de l'additivité de la probabilité, l'événement $\left(X_{n_1} = i_1,\, \ldots,\, X_{n_p} = i_p,\, X_n = i,\, X_{n+1} = j\right)$ ayant été partitionné selon les valeurs prises par les variables aléatoires de la famille $(X_0, \ldots, X_{n-1})$ qui n'appartiennent pas à la famille $\left(X_{n_1},\, \ldots,\, X_{n_p}\right)$.

• $=^{(3)}$ provient de la règle de multiplication des probabilités le long d'un chemin.

• $=^{(4)}$ résulte de la règle de multiplication.

• Enfin, pour obtenir $=^{(5)}$, on remarque que la somme dans $=^{(4)}$ est la somme des probabilités des éléments d'une partition de l'événement $\left(X_{j_1} = i_1,\, \ldots, X_{j_p} = i_p,\, X_n = i\right)$. ■

Le théorème 1 se déduit du théorème 2 dans le cas $p = 0$.

**Remarques sur la définition des chaînes de Marbov, vocabulaire**

On peut supposer que les variables aléatoires $X_0,\, X_1,\, X_2,\, \ldots$ sont définies à partir d'une suite d'expériences aléatoires.

• On verra d'après les exemples que ces expériences *ne sont habituellement ni identiques ni indépendantes*. Ce n'est pas toujours vrai, voir la sous-section 2.3.

• La *trajectoire* ou le *parcours* de la chaîne lors d'une réalisation de la suite d'expériences est la suite $(i_0,\, i_1,\, \ldots)$ des *états visités*, c'est à dire des valeurs prises par les variables aléatoires $X_0,\, X_1,\, \ldots$

• La propriété de Markov (1) est très forte. Normalement,

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j / X_0 = i_0,\, \ldots,\, X_{n-1} = i_{n-1},\, X_n = i\right)$$

devrait dépendre de $n,\, i_0,\, \ldots,\, i_{n-1},\, i$ et $j$. En faisant l'hypothèse que cette quantité vaut $p(i, j)$, on impose qu'elle ne dépende que de $i$ et de $j$, c'est à dire qu'elle dépende seulement *de l'état de la chaîne au présent et au futur immédiat.*

• Par exemple, la probabilité que la chaîne aille en $j$ à l'instant 3 sachant qu'elle est en $i$ à l'instant 2 est la même que la probabilité que la chaîne aille en $j$ à l'instant 167 sachant qu'elle est en $i$ à l'instant 166. Ce qui s'est passé avant n'a pas d'importance. On exprime cette propriété est disant que la chaîne est *homogène*.

• Un peu de poésie : on exprime habituellement le fait que

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = j / X_0 = i_0,\, \ldots,\, X_{n-1} = i_{n-1},\, X_n = i\right)$$

ne dépend pas de $i_0, \ldots, i_{n-1}$ en disant que le futur du processus conditionné par son passé et son présent ne dépend que de son présent.

**Exercice 2** *Soit $\mathscr{X}$ une chaîne de Markov d'espace des états $\mathscr{E}$, de loi initiale $\mathscr{L}_0$ sur $\mathscr{E}$ et de matrice de transition $T$. On observe la chaîne à partir d'un instant $p \geqslant 0$ donné, c'est à dire que l'on considère la suite de variables aléatoires $\mathscr{Y} = (Y_0,\, Y_1,\, Y_2,\, \ldots)$ définie par $Y_0 = X_p$, $Y_1 = X_{p+1}$, $Y_2 = X_{p+2}$, …Démontrer que $\mathscr{Y}$ est une chaîne de Markov d'espace des états $\mathscr{E}$, de loi initiale $\mathscr{L}_p$ et de matrice de transition $T$.* △

## 2.3 Chaîne de Markov et indépendance

Les lycéens connaissent le cas d'une variable aléatoire $X$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs, définie à partir d'une expérience aléatoire que l'on répète indéfiniment, les répétitions étant indépendantes les unes des autres. On est amené à considérer les variables aléatoires $X_0,\, X_1,\, \ldots$ définies comme $X$ à partir des expériences successives. La suite $(X_n,\, n \geqslant 0)$, suite de variables aléatoires indépendantes suivant la même loi, sera une chaîne de Markov très particulière puisque l'on aura, si

$\mathbb{P}(X_0=i_0,\,\ldots,\,X_{n-1}=i_{n-1},\,X_n=i) = \mathbb{P}(X_0=i_0)\cdots\mathbb{P}(X_{n-1}=i_{n-1})\cdot\mathbb{P}(X_n=i) > 0$ :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1}=j/X_0=i_0,\,\ldots,\,X_{n-1}=i_{n-1},\,X_n=i) &= \frac{\mathbb{P}(X_0=i_0)\cdots\mathbb{P}(X_{n-1}=i_{n-1})\,\mathbb{P}(X_n=i)\,\mathbb{P}(X_{n+1}=j)}{\mathbb{P}(X_0=i_0)\cdots\mathbb{P}(X_{n-1}=i_{n-1})\cdot\mathbb{P}(X_n=i)}\\
&= \mathbb{P}(X_{n+1}=j)\\
&= \mathbb{P}(X_1=j) \qquad (9)\\
&= \mathbb{P}(X_0=j) \qquad (10)
\end{aligned}$$

puisque les variables aléatoires $X_0,\, X_1,\, \ldots$ sont indépendantes et équidistribuées. On voit que

$$\forall i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, t\}, \quad (p(i,1),\, p(i,2),\, \ldots, p(i,t)) = L_0 = L_1 = \cdots \qquad (11)$$

Cela signifie que les lignes de la matrice de transition sont toutes égales à la loi commune des variables aléatoires $X_0,\, X_1,\, \ldots$.

Si $X_0$ suit une loi différente (les autres hypothèses étant conservées), si la loi commune des variables aléatoires $X_1,\, X_2, \ldots$ est notée $L = (L(1),\, \ldots,\, L(t))$, les égalités ci-dessus restent vraies sauf (10) et (11) (il faut retirer $L_0$). $(X_n,\, n \geqslant 0)$ est une chaîne de Markov dont l'espace des états est $\mathscr{E}$, dont la loi initiale est la loi de $X_0$ et dont la matrice de transition est

$$T = \begin{pmatrix}
L(1) & L(2) & \ldots & \ldots & \ldots & L(t)\\
L(1) & L(2) & \ldots & \ldots & \ldots & L(t)\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
L(1) & L(2) & \ldots & \ldots & \ldots & L(t)
\end{pmatrix}$$

Voir aussi la réciproque de l'exercice 1.

La notion de chaîne de Markov est plus générale que la notion de suite de variables aléatoires indépendantes et équidistribuées. La théorie des chaînes de Markov résout des problèmes qui échappe au cas indépendant équidistribué. Elle est une porte d'entrée à la théorie des processus stochastiques. On verra qu'elle s'appuie fortement sur le calcul matriciel.

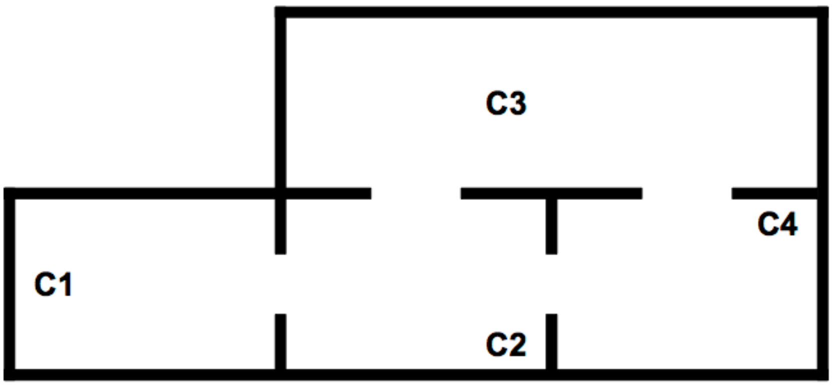
# 3 Exemples de chaînes de Markov

## 3.1 Lois instantanées d'une chaîne de Markov

On appelle ainsi les lois $\mathscr{L}_0,\, \mathscr{L}_1,\, \ldots,\, \mathscr{L}_n,\, \ldots$ des variables aléatoires $X_0,\, X_1,\, \ldots,\, X_n,\, \ldots$ Ce sont des lois sur $\mathscr{E}$. On les confond avec les matrices-lignes $L_n = (L_n(1),\, L_n(2),\, \ldots,\, L_n(t))$.

## 3.2 Exemples

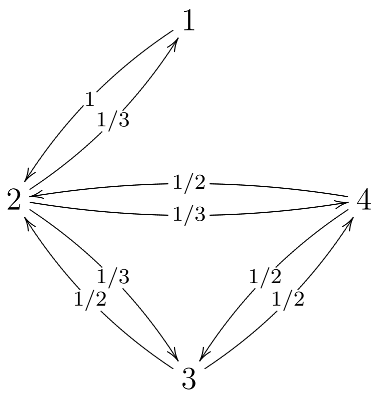
**Exemple 2 : Souris sans mémoire** *Une souris se déplace dans une cage comportant 4 compartiments : $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$, disposés selon le dessin ci-dessous :*




*On suppose que la souris se trouve dans le compartiment $C_1$ à l'instant initial et qu'elle change indéfiniment de compartiment de la manière suivante : lorsqu'elle se trouve dans un compartiment ayant k portes, elle choisit au hasard l'une des portes (avec la probabilité $\frac{1}{k}$). Comment peut-on modéliser ce jeu ?* $\triangle$

**Modélisation du déplacement de la souris**

On peut représenter le mouvement de la souris à l'aide d'un graphe :




Dans cet exemple, le graphe apporte peu. La matrice de transition $T$ ci-dessous est aussi parlante. Il est naturel de modéliser le parcours aléatoire de la souris par une chaîne de Markov dont les états sont 1, 2, 3 et 4 (pour $C_1$, $C_2$, $C_3$ et $C_4$), de loi initiale

$$L_0 = (1, 0, 0, 0) \tag{12}$$

(parce que la souris se trouve dans la case $C_1$ au début du jeu) et de matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \quad \bigtriangledown \tag{13}$$

Cette modélisation est convaincante. Si à l'instant 0, la souris était placée au hasard dans la cage, on remplacerait (12) par $L_0 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Cette nouvelle chaîne de Markov ne serait pas radicalement différente de la précédente.

**Il y a des limites de bon sens aux modélisations markoviennes** : par exemple, si l'on imagine que la souris est à la recherche d'un morceau de fromage et qu'elle a de la mémoire, on ne pourra plus proposer un modèle qui impliquerait (1) parce que la souris ne retournerait pas dans un compartiment où elle est déjà passée sans trouver de fromage. Intuitivement, dès que l'on introduit de la mémoire dans un système, la propriété markovienne disparaît. Elle se conserve quand même quand la mémoire est bornée (par exemple limitée à $n-1$ et $n-2$ quand $n$ désigne le présent). Il faut alors faire une théorie ad hoc.

**Exercice 3** (voir la solution page 16) *Modéliser le déplacement de la souris dans le cas suivant : quelqu'un a placé un morceau de quiche lorraine dont elle raffole mais qui est empoisonné en $C_4$. Si elle entre dans cette case, elle en mange et meurt instantanément.* $\triangle$

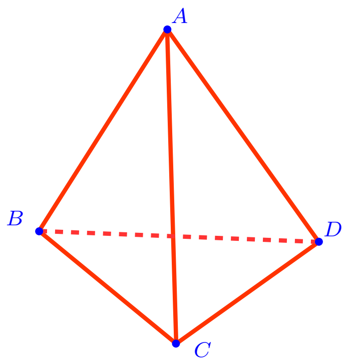
Si la chaîne atteint l'état 4, elle y reste. On dit que 4 est un état absorbant.

Voici maintenant un exemple très dégénéré de chaîne de Markov :

**Exercice 4** *Décrire le comportement de la chaîne $\mathscr{X}$ qui est modélisé par*

$$\mathscr{E} = (1,\, 2,\, 3), \quad L_0 = (1/3,\, 1/3,\, 1/3), \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

**Exemple 3 Marche aléatoire sur une pyramide** *(voir la suite à l'exemple 6)*
*Le terme marche aléatoire est assez vague. L'exemple 2 et l'exercice 3 sont des marches aléatoires, voir aussi les activités [7] et [11]. Typiquement, une particule se déplace sur un réseau. À chaque nœud de ce réseau, elle choisit au hasard un chemin parmi ceux qui se présentent à elle. Voici une marche aléatoire sur un tétraèdre $ABCD$. On peut coder les sommets 1 pour A, 2 pour $B$, etc. Quand la particule arrive à un sommet, elle ne peut y rester. Elle a le choix entre 3 arêtes (autrement dit, elle peut se diriger vers l'un des 3 autres sommets). Elle en choisit une au hasard (avec la probabilité $1/3$). $T$ est la matrice de transition de cette marche aléatoire. On traduit par un zéro le fait que la particule ne peut rester en un sommet (c'est à dire qu'elle peut y rester avec la probabilité 0)*




$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}. \quad \triangle$$

**Exemple 4 Modèle de diffusion d'Ehrenfest** *(cf. [4], chapitre 20, pp. 274-276 ou [2], pp. 51-53).*
*Ce modèle a été conçu pour expliquer certains résultats expérimentaux qui semblaient paradoxaux (cf. [12]). À l'origine, c'est un modèle d'échange de chaleur entre deux corps. T. et P. Ehrenfest ont proposé l'interprétation suivante : dans une boîte à 2 compartiments se trouvent $N$ particules. À l'instant initial, il y a $i_0$ particules dans le premier, $N - i_0$ dans le second. On tire une particule de la boîte au hasard et on la change de compartiment. On répète cette manipulation à chaque instant suivant. L'état du système est décrit à l'instant $n$ par $X_n$, variable aléatoire du nombre de particules dans le premier compartiment à cet instant (on pourra de même définir $X_0$ si le nombre de particules dans le premier compartiment à l'instant initial*

*est lui-même aléatoire ; il faudra alors spécifier la loi $\mathscr{L}_0$ de $X_0$ sur $\mathscr{E} = (0, 1, \ldots, N)$).*

*On se demande quel est l'état du système à l'instant $n$, en clair : quelle est la loi de $X_n$ ?*

*Bien sûr, l'état du système à l'instant $n+1$ ne dépend que de son état à l'instant $n$. On modélise par une chaîne de Markov. L'évolution du système peut être représentée par un graphe :*

$$0 \xrightarrow{1} 1 \cdots\cdots \quad \cdots\cdots (j-1) \xleftarrow{j/N} j \xrightarrow{1-j/N} (j+1) \cdots\cdots \quad \cdots\cdots (N-1) \xleftarrow{1} N$$

*(parce que si à l'instant $n$, il y a $j$ particules ($1 \leqslant j \leqslant N-1$) dans le premier compartiment, la probabilité de tirer dans la boîte une particule de ce compartiment est $j/N$ et qu'alors, à l'instant $n+1$, il ne reste plus que $j-1$ particules dans le premier compartiment) ou, de manière équivalente, par la matrice de transition*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/N & 0 & 1-1/N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/N & 0 & 1-2/N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-1/N & 0 & 1/N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \triangle \tag{14}$$

# 4 Calcul des lois instantanées

## 4.1 Calcul matriciel de lois

**Théorème 4** *Pour tout entier $n \geqslant 1$,*

$$L_n = L_{n-1} \cdot T = L_0 \cdot T^n. \quad \square \tag{15}$$

**Démonstration :** Pour tout état $j$, l'événement $(X_n = j)$ est évidemment la réunion des événements deux à deux disjoints $(X_{n-1} = i, X_n = j)$, $i \in \mathscr{E}$. $L_n(j)$ est donc la somme de leurs probabilités, qui se réduit à la somme notée ci-dessous $\sum^*$ sur les états $i$ tels que $P(X_{n-1} = i) > 0$. Pour ces états, on peut conditionner par $(X_{n-1} = i)$ et écrire, d'après le théorème 1,

$$P(X_{n-1} = i, X_n = j) = P(X_{n-1} = i) \cdot P(X_n = j / X_{n-1} = i) = P(X_{n-1} = i) \cdot p(i, j)$$

ce qui montre que, quel que soit l'état $j$ :

$$\begin{aligned} L_n(j) &= \sum_{i \in \mathscr{E}} P(X_{n-1} = i, X_n = j) \\ &= \sum^* P(X_{n-1} = i) \cdot p(i, j) \\ &= \sum_{i \in \mathscr{E}} L_{n-1}(i) \cdot p(i, j) \end{aligned}$$

On voit alors que le $j^{\text{ème}}$ élément de $L_n$ est le $j^{\text{ème}}$ élément du produit matriciel $L_{n-1} \cdot T$, ce qui prouve que

$$L_n = L_{n-1} \cdot T$$

En appliquant de nouveau cette égalité, on obtient :

$$L_n = L_{n-1} \cdot T = L_{n-2} \cdot T^2 = \cdots = L_1 \cdot T^{n-1} = L_0 \cdot T^n. \quad \blacksquare$$

Le calcul des lois instantanées d'une chaîne de Markov est donc ramené au calcul des puissances de la matrice de transition. On a ainsi ramené un problème de Calcul des probabilités à un calcul matriciel qui pourra être exécuté par un logiciel de calcul formel comme « Xcas » (cf. [6], p. 23).

Remarquons que dans le courant de la démonstration, on a notamment vu passer le résultat suivant :

**Théorème 5** *Pour tous entiers $m$ et $n$ tels que $m > n \geqslant 0$,*

$$L_m = L_n \cdot T^{m-n}. \quad \square \tag{16}$$

L'égalité (16) permet, si l'on connaît la loi de $X_n$, d'en déduire la loi de $X_m$. Il y a un cas particulièrement simple :

**Théorème 6** *Si la chaîne de Markov part de l'état $i$, autrement dit si $X_0 = i$ (la variable aléatoire $X_0$ est constante et vaut $i$), pour tout entier $n \geqslant 1$, la loi de $X_n$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice $T^n$.* $\square$

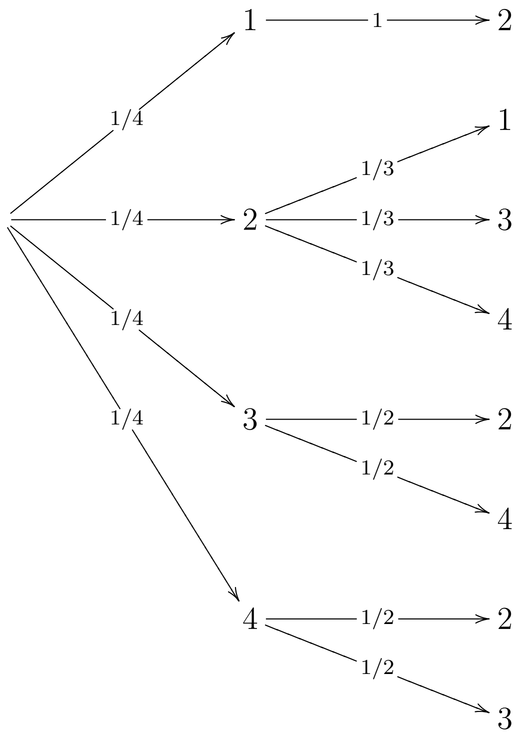
Dans le cas général de la formule (16), on peut dire que $L_m$ est le barycentre des lignes de $T^{m-n}$ affectées des coefficients $L_n(1)$, ..., $L_n(t)$.

## 4.2 Calcul à la main des lois $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$

**Exemple 5** *On reprend l'exemple (2) en supposant que la souris est placée au hasard dans l'un des 4 compartiments à l'instant 0, c'est à dire qu'on suppose que $L_0 = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$. Calculer $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$.* $\triangle$

On se limite aux lois $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ parce que c'est long. La bonne solution est évidemment d'utiliser la formule (15).

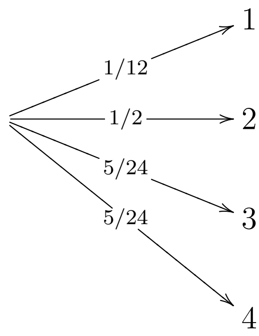
**Calcul de $\mathscr{L}_1$** On peut s'aider d'un graphe :




En utilisant la règle de multiplication des probabilités le long d'un chemin et l'additivité de la probabilité, on obtient la loi $\mathscr{L}_1$ que l'on peut résumer ainsi :

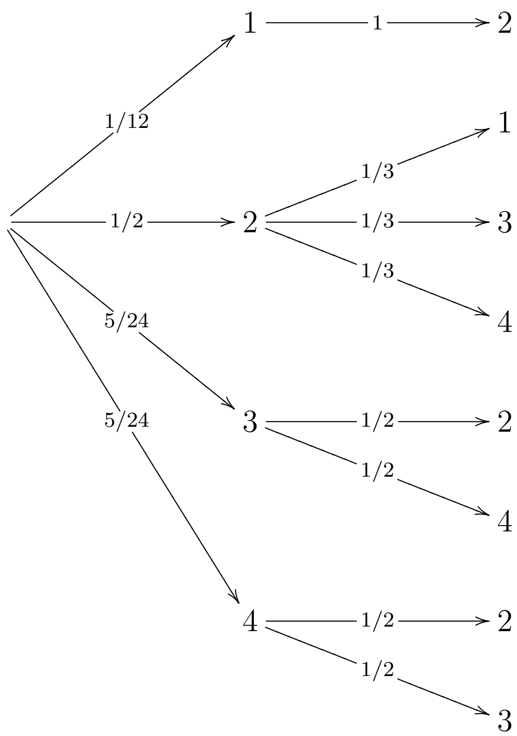
| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1/12 | 1/2 | 5/24 | 5/24 |

ou




**Calcul de $\mathscr{L}_2$**

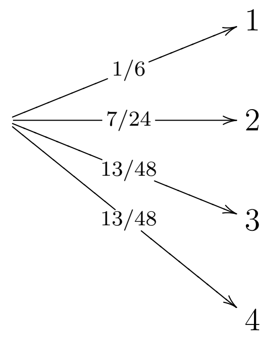
Compte-tenu de la règle de multiplication des probabilités le long d'un chemin, on peut partir de $\mathscr{L}_1$ :




ce qui donne les résumés suivants :

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 1/6 | 7/24 | 13/48 | 13/48 |

ou




$\triangledown$

## 4.3 Transitions lointaines

On notera $p^{(n)}(i, j)$ l'élément générique de la matrice $T^n$ pour tout entier $n \geqslant 2$ (pour $n = 1$, on rappelle que l'élément générique de $T$ a été noté plus simplement $p(i, j)$). On a vu que $p(i, j)$

est, non une probabilité, mais une probabilité conditionnelle. Il en est de même de $p^{(n)}(i,j)$.

$n$ désignant toujours le présent, on va supposer que le futur $m$ que nous allons considérer vérifie $m \geqslant n+2$. C'est un futur lointain et non plus un futur immédiat ($m = n+1$), cas envisagé jusqu'à maintenant. C'est pourquoi nous parlons de transitions lointaines. On peut dire cela autrement : dans les conditionnements, ce n'est plus le présent qui va compter (sauf si $n_p = n$ ci-dessous), mais le passé le plus proche du futur considéré.

**Théorème 7** *Pour tous entiers* $0 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_p$, $p \geqslant 2$ *et tous états* $i_1, i_2, \ldots, i_p$,

$$\mathbb{P}\left(X_{n_1}=i_1,\, X_{n_2}=i_2,\, \ldots,\, X_{n_p}=i_p\right)=L_{n_1}(i_1)\cdot p^{(n_2-n_1)}(i_1,i_2)\cdots p^{(n_p-n_{p-1})}(i_{p-1},i_p). \quad \square \tag{17}$$

**Démonstration du théorème 8 :** Elle repose sur (6).

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(X_{n_1}=i_1,\, X_{n_2}=i_2,\, \ldots,\, X_{n_p}=i_p\right)\\
&=^{(1)} \sum_{\substack{j_{n_1},\ldots,j_{n_p}\in\mathscr{E}\\ j_{n_1}=i_1,\ldots,j_{n_p}=i_p}} \mathbb{P}\left(X_{n_1}=j_{n_1},\, \ldots,\, X_{n_p-1}=j_{n_p-1},\, X_{n_p}=j_{n_p}\right)\\
&=^{(2)} \sum_{\substack{j_{n_1},\ldots,j_{n_p}\in\mathscr{E}\\ j_{n_1}=i_1,\ldots,j_{n_p}=i_p}} L_{n_1}(j_{n_1})\cdot p(j_{n_1},j_{n_1+1})\cdot p(j_{n_1+1},j_{n_1+2})\cdots p(j_{n_p-1},j_{n_p})\\
&=^{(3)} L_{n_1}(i_1)\cdot\left(\sum_{\substack{j_{n_1},\ldots,j_{n_{p-1}}\in\mathscr{E}\\ j_{n_1}=i_1,\ldots,j_{n_{p-1}}=i_{p-1}}} p(j_{n_1},j_{n_1+1})\cdot p(j_{n_1+1},j_{n_1+2})\cdots p(j_{n_{p-1}-1},j_{n_{p-1}})\right)\times\\
&\qquad\left(\sum_{\substack{j_{n_{p-1}},\ldots,j_{n_p}\in\mathscr{E}\\ j_{n_{p-1}}=i_{p-1},\, j_{n_p}=i_p}} p(j_{n_{p-1}},j_{n_{p-1}+1})\cdots p(j_{n_p-1},j_{n_p})\right)\\
&=^{(4)} L_{n_1}(i_1)\cdot\left(\sum_{\substack{j_{n_1},\ldots,j_{n_{p-1}}\in\mathscr{E}\\ j_{n_1}=i_1,\ldots,j_{n_{p-1}}=i_{p-1}}} p(j_{n_1},j_{n_1+1})\cdot p(j_{n_1+1},j_{n_1+2})\cdots p(j_{n_{p-1}-1},j_{n_{p-1}})\right)\cdot p^{(n_p-n_{p-1})}(i_{p-1},i_p)\\
&=\ \ldots\\
&=^{(5)} L_{n_1}(i_1)\cdot p^{(n_2-n_1)}(i_1,i_2)\cdots p^{(n_p-n_{p-1})}(i_{p-1},i_p)
\end{aligned} \tag{18}$$

*Justification du calcul :*

- $=^{(1)}$ : on partitionne en tenant compte de tous les instants de $n_1$ à $n_p$ et on utilise l'additivité de la probabilité. On obtient une sommation sur $n_p - n_1 + 1$ indices dont $p$ sont fixes.
- $=^{(2)}$ provient de (6).
- $=^{(3)}$ provient d'une mise en facteur. Ne pas oublier, dans tout ce calcul, que les états $j_{n_1}$, $j_{n_2}$, $\ldots$, $j_{n_{p-1}}$, $j_{n_p}$ ne varient pas et sont égaux respectivement à $i_1$, $i_2$, $\ldots$, $i_{p-1}$ et $i_p$.
- $=^{(4)}$ : on reconnaît, dans la deuxième somme de $=^{(3)}$ l'élément de la ${i_{p-1}}^{\text{ème}}$ ligne et de la ${i_p}^{\text{ème}}$ colonne de la matrice $T^{n_p-n_{p-1}}$. ■

On en déduit facilement les corollaires suivants :

**Théorème 8** *Quels que soient l'entier* $p \geqslant 1$, *les instants* $0 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_p < m$ *et les états* $i_1, i_2, \ldots, i_p, j$ *tels que* $\mathbb{P}\left(X_{n_1}=i_1,\, \ldots,\, X_{n_p}=i_p\right) > 0$

$$\mathbb{P}\left(X_m = j / X_{n_1}=i_1,\, \ldots,\, X_{n_p}=i_p\right) = p^{(m-n_p)}(i_p,j) \quad \square \tag{19}$$

Pour $p = 1$, on obtient :

**Théorème 9** *Pour tous entiers $m$, $n \geqslant 0$ tels que $m \geqslant n+2$ et tous états $i$ et $j$ tels que $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$,*

$$\mathbb{P}(X_m = j / X_n = i) = p^{(m-n)}(i, j). \quad \square \tag{20}$$

Le cas $m = n+1$ avait fait l'objet du théorème 1. Le théorème 9 nous donne la signification probabiliste des coefficients des puissances de la matrice de transition $T$.

# 5 Quels problèmes résolvent les chaînes de Markov ?

Les chaînes de Markov permettent de résoudre de nombreux problèmes qui se posent naturellement. Le calcul des lois instantanées est l'un de ces problèmes, traité dans les sous-sections 4.1 et 4.2.

## 5.1 Lois-limites

**Définition 3** *Soit $\mathscr{X}$ une chaîne de Markov. On dit qu'elle a une loi-limite $\mathscr{L}_\infty$ identifiée à $L_\infty = [L_\infty(1),\, L_\infty(2),\, \ldots,\, L_\infty(t)]$ si*

$$L_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L_\infty \tag{21}$$

*autrement dit si pour $i = 1, \ldots, t$,*

$$L_n(i) \xrightarrow[n \to +\infty]{} L_\infty(i) \quad \triangle \tag{22}$$

**Remarques :**

• On voit que la convergence d'une suite de matrices utilisée dans cette définition est la convergence composante par composante.

• S'il y a une loi-limite, quand $n$ est assez grand, on pourra dans la pratique confondre $\mathscr{L}_\infty$ et $\mathscr{L}_n$.

• Si $\mathscr{L}_\infty$ existe, d'après (16), plus précisément d'après $L_{n+1} = L_n \cdot T$, elle vérifie l'égalité

$$L_\infty = L_\infty \cdot T \tag{23}$$

(par passage à la limite), ce qui est un système de $t$ équations linéaires à $t$ inconnues.

• Si $L_0 = \mathscr{L}_\infty$, d'après (15), $L_0 = L_1 = \ldots$ Cela signifie que la chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires équidistribuées. Sauf cas particulier, elles ne seront pas indépendantes.

**Exemple 6** (Suite de l'exemple 3) *On démontre dans [2], p. 19, que, quelle que soit la loi initiale, les lois instantanées convergent vers la loi $\mathscr{L}_\infty = [1/4,\, 1/4,\, 1/4,\, 1/4]$. Il est intéressant de noter que cette loi-limite ne dépend pas de la loi initiale (contrairement aux lois instantanées). Si la particule est placée au hasard sur un sommet du tétraèdre à l'instant 0, les variables aléatoires $X_n$, $n \geqslant 0$, suivront toutes la loi uniforme sur $\mathscr{E}$.* $\triangle$

## 5.2 Temps d'arrêt

Soit $\mathscr{X} = (X_0, X_1, \ldots)$ une chaîne de Markov (sous-entendu d'espace des états $\mathscr{E}$, de loi initiale $\mathscr{L}_0$ et de matrice de transition $T$). On peut en général lui associer de nombreux temps d'arrêt. Un temps d'arrêt esu une variable aléatoire dont les valeurs sont des instants : 0, 1, 2, ... et qui ne prennent la valeur $n$ qu'en fonction du comportement de la chaîne jusqu'à l'instant

$n$. La définition exacte des temps d'arrêt demande des connaissances précises de mesurabilité. Nous en donnons seulement des exemples ci-dessous.

**Temps de retour à l'état initial :** C'est la variable aléatoire $R$ définie par

$$R = \min\left(n,\ n \geqslant 1,\ X_n = X_0\right) \tag{24}$$

autrement dit, $R$ est le premier instant de retour à l'état initial (s'il existe). $R$ est définie sur l'événement $\bigcup_{n\geqslant 1}(X_n = X_0)$. Cet événement peut être de probabilité $< 1$, éventuellement vide.

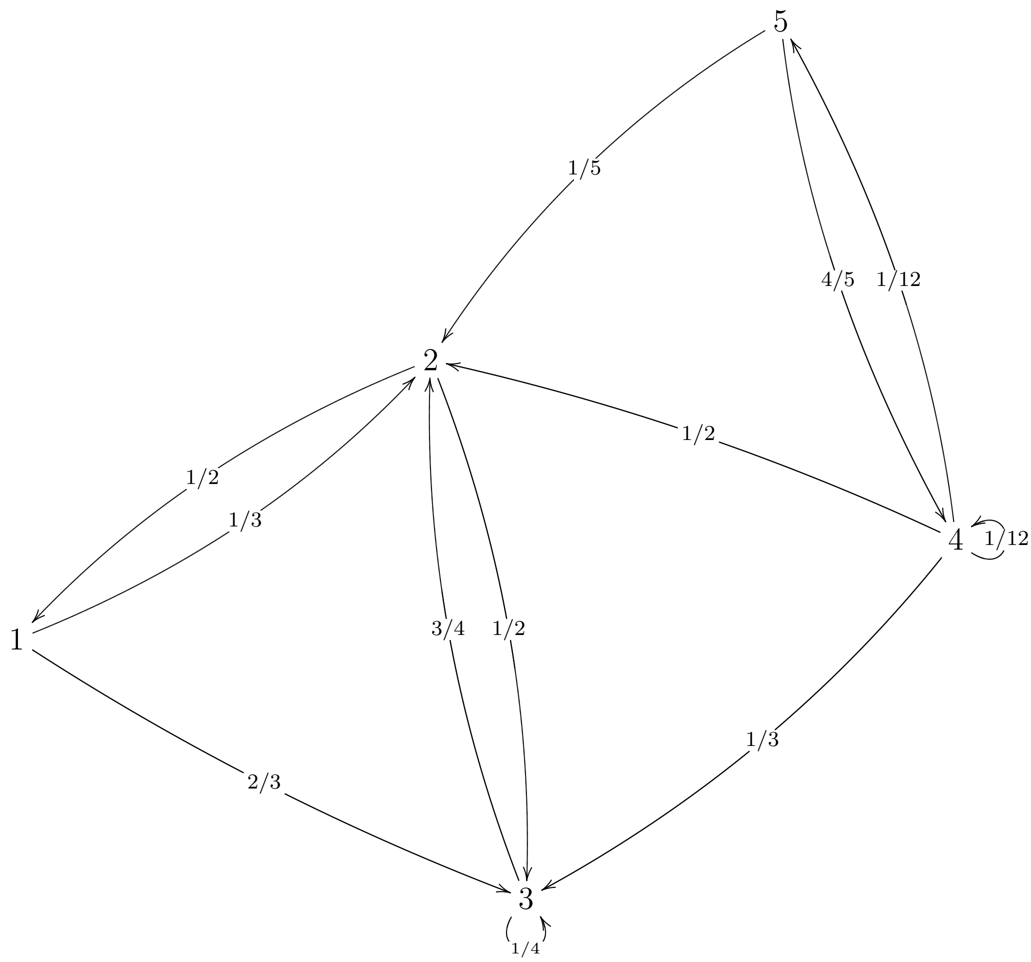
**Temps d'atteinte :** Soit $\mathscr{E}_0$ un sous-ensemble de $\mathscr{E}$ ni vide ni égal à $\mathscr{E}$. Le temps d'atteinte de $\mathscr{E}$ est la variable aléatoire $A$ définie par

$$A = \min\left(n,\ n \geqslant 0,\ X_n \in \mathscr{E}\right) \tag{25}$$

$A$ est définie sur l'événement $\bigcup_{n\geqslant 0}(X_n \in \mathscr{E})$ dont la probabilité peut être $< 1$. Il peut éventuellement être vide.

$\mathscr{E}_0$ peut être une classe absorbante (éventuellement réduite à un état) : quand la particule atteint $\mathscr{E}$, elle ne peut plus en sortir. En voici un exemple :

**Exemple 7** *Soit $\mathscr{X}$ une chaîne de Markov de matrice de transition $T$ représentée par le graphe suivant :*




$\mathscr{E}_0 = (1,\, 2,\, 3)$ *est une classe absorbante : si la particule (ou la souris ou ...) s'y trouve ou y entre, elle n'en sortira plus.*

*Ce graphe apporte la même information que la matrice de transition $T$ de la chaîne :*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/3 & 1/12 & 1/12 \\ 0 & 1/5 & 0 & 4/5 & 0 \end{pmatrix} \qquad (26)$$

*La présence d'une classe absorbante se traduit ici par un bloc de 6 zéros en haut à droite. Bien sûr, si les états avaient été numérotés autrement, ce bloc pourrait être masqué. Ce bloc restera tel quel dans $T^2$, $T^3$, ... car on ne peut pas sortir de $\mathscr{E}_0$ en 2 coups, en 3 coups, ...* $\triangle$

Dans l'exercice 3, l'état 4 est un état absorbant (mort de la souris) et le temps d'atteinte de $\mathscr{E}_0$ est simplement sa durée de vie.

**Remarque sur la simulation de temps d'arrêt :** Avant de simuler un temps d'arrêt, démontrer qu'il est défini avec probabilité 1 ; sinon, être prêt à utiliser la touche d'interruption du calcul !

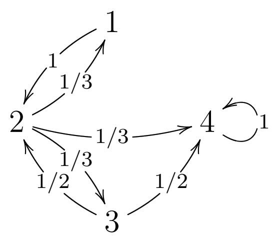
Voici un autre temps d'arrêt :

**Exemple 8** (Suite de l'exemple 3) *On peut appeler $V$ la variable aléatoire égale au premier instant où la particule a visité tous les sommets de la pyramide. Démontrer qu'elle est définie avec probabilité 1, trouver sa loi, ses moyenne et variance, etc.* $\triangle$

# 6 Solution des exercices

**Solution de l'exercice 3**

On modifiera comme suit le graphe et la matrice de transition de l'exemple 2 :




$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \triangledown \qquad (27)$$

# Références

[1] B.O. spécial n°8 du 13 octobre 2011. *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique*
http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

[2] *Ressources pour la classe terminale générale et technologique Mathématiques Série S Enseignement de spécialité*
http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/62/6/ressource_specialite_v5_210626.pdf

[3] William Feller *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Volume 1*, 3rd Edition, Wiley, New York (1968), p.121 et pp.377-378.

[4] Dominique Foata et Aimé Fuchs *Calcul des Probabilités*, 2ème édition, Dunod, Paris (1998), pp.127-128 : chaînes de Markov homogènes.

[5] Olivier Garet et Aline Kurtzmannn *De l'intégration aux probabilités*, Ellipse, Paris (2011).

[6] R. De Graeve, B. Parisse, B.Ycart *Tutoriel Xcas*
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~parisse/giac/tutoriel.html

[7] Pierre Lapôtre *La marche de l'ivrogne*, activité, Première Algorithmique
http://gradus-ad-mathematicam.fr/Premiere_Algorithmique3.htm

[8] Pierre Lapôtre & Raymond Moché *Marche aléatoire d'une souris*, activité TS Spé Maths.
http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSSpecialiteMaths6.htm

La marche aléatoire de cette souris se modélise comme une chaîne de Markov à 4 états. À l'aide de « Xcas », on calcule la loi $L_n$ de l'état de la chaîne à l'instant $n$, on montre qu'il y a une loi limite et on la calcule.

[9] Pierre Lapôtre & Raymond Moché *Simulation de la marche aléatoire d'une souris*, activité TS Proba/Stat.
http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSProbaStat3.htm

[10] Raymond Moché. *La puce, marche aléatoire*, activité Seconde
http://gradus-ad-mathematicam.fr/Seconde_SPA1.htm

[11] Raymond Moché. *Marche aléatoire sur un tétraèdre*, activité TS Spécialité Maths
http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSSpecialite4.htm

[12] Wikipedia *Modèle des urnes d'Ehrenfest*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Modèle_des_urnes_d%27Ehrenfest

[13] Wikipedia *Andreï Markov*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Andreï_Markov_(mathématicien)

Le logo de l'exposé provient de cet article de Wikipedia.