Le problème du collectionneur

Auteur : Raymond Moché

Voici le problème du collectionneur tel qu'il est présenté dans [2], p.48 : « Un fabricant de produits alimentaires propose à ses acheteurs potentiels de constituer la carte de la France des 101 départements, chacun de ces départements étant figuré par un aimantin. Chaque conditionnement d'un certain produit contient un aimantin, les aimantins étant répartis de manière uniforme.

On se propose de déterminer le nombre moyen de boîtes qu'un collectionneur isolé, sans possibilité d'échanges, doit se procurer pour réaliser la collection complète de départements. »

L'objet de ce papier est de compléter la solution donnée dans [2], pp.48-50 en détaillant les démonstrations.

Table des matières

1 Rappels ou compléments de Calcul des Probabilités

Dans ce papier, on ne peut échapper aux séries. La notion de série absolument convergente est supposée connue. Voici quelques rappels ou compléments de Calcul des Probabilités.

✓ Soit X une variable aléatoire. On suppose qu'il existe une suite $(x_n,\ n \geqslant 1)$ de nombres réels tels que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X = x_n\right) = 1$$

[1] Alors, on dit que l'espérance de X existe si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot \mathbb{P}\left(X = x_n\right)$$

1. S'il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $\mathbb{P}\left(X = x_n\right) > 0$, on dit en général que X est une variable discrète finie. Dans ce cas, la série (1) est une somme ordinaire. Sinon, on pourra dire que X est une variable aléatoire discrète infinie. On passe alors des sommes aux séries.

est absolument convergente. Dans ce cas, on définit l'espérance de X par :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \cdot \mathbb{P}(X = x_n) \tag{1}$$

✓ Si deux variables aléatoires X et Y définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ ont une espérance, $X + Y$ a une espérance donnée par

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y) \tag{2}$$

[2]. Cela s'étend par les procédés habituels à la somme de $n \geqslant 2$ variables aléatoires.

✓ On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique[3] de paramètre p $(0 < p < 1)$ si X prend les valeurs 1, 2, ... avec respectivement les probabilités

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = pq^{k-1} \quad \text{où} \quad q = 1 - p \tag{3}$$

La série $\sum_{k=1}^{+\infty} kpq^{k-1}$ étant (absolument) convergente, $E(X)$ existe. On démontre que[4]

$$E(X) = \frac{1}{p} \tag{4}$$

✓ X, X_1, X_2, ... désignant des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, on dit que X_n converge presque sûrement vers X et on écrit

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} X$$

s'il existe un événement Ω^* de probabilité 1 tel que

$$\forall \omega \in \Omega^*, \quad X_n(\omega) \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} X(\omega)$$

✓ Soit X, X_1, X_2, ... des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $(1, 2, \ldots, N)$. Alors[5],

$$X_n \xrightarrow[n \to +\infty]{p.s.} X \implies \forall k \in (1, 2, \ldots, N), \quad \mathbb{P}(X_n = k) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(X = k) \tag{5}$$

✓ La définition d'une chaîne de Markov $\mathscr{X} = (X_n, n \geqslant 0)$ d'espace des états fini $\mathscr{E}$, de loi initiale L_0 et de matrice de transition T est supposée connue[6].

✓ Pour tous entiers n, m tels que $1 \leqslant n < m$ et tous états i_n, i_{n+1}, ..., i_m, on sait que[7]

$$\mathbb{P}(X_n = i_n, X_{n+1} = i_{n+1}, \ldots, X_m = i_m) = \mathbb{P}(X_n = i_n)\, T(i_n, i_{n+1}) \ldots T(i_{m-1}, i_m) \tag{6}$$

2. Cette propriété est un aspect de la linéarité de l'intégrale de Lebesgue. On peut la démontrer en bricolant des séries absolument convergentes.
3. cf.[3] p.125
4. cf.[3] p.169
5. parce que la convergence presque sûre entraîne la convergence en probabilité, cf. [3] p.240, qui entraîne la convergence en loi, cf. [3] p.274, et d'après le théorème du Porte-manteau, cf. [3] p.269 ; on peut aussi démontrer directement (5) à l'aide du théorème de convergence dominée, cf. [3] p.57.
6. cf. [4] par exemple.
7. idem

2 Modélisation du problème du collectionneur

On peut identifier la suite des achats du collectionneur à une suite de tirages au sort d'un nombre dans l'ensemble $\{1, \ldots, 101\}$ [8], [9]. Le nombre de tirages au sort nécessaires pour obtenir la collection complète n'est pas borné [10]. On va donc supposer que l'on répète indéfiniment le tirage au sort. On remarquera que les tirages se font indépendamment les uns des autres. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on appelle Y_n la variable aléatoire égale au nombre qui a été tiré au n$^{\text{ème}}$ coup. $(Y_n, \, n \geqslant 1)$ est donc une suite de variables aléatoires définies sur un certain espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et prenant leurs valeurs dans $\{1, \ldots, 101\}$, chacune avec la probabilité $\dfrac{1}{101}$.

Pour généraliser un peu le problème comme on le fait dans [2], nous allons supposer que l'on collectionne non pas 101 mais N objets [11]. Pour tout entier $n \geqslant 1$, Y_n devient donc la variable aléatoire égale au numéro de l'objet qui a été tiré au n$^{\text{ème}}$ coup.

2.1 Une chaîne de Markov

Pour tout entier $n \geqslant 0$, on appelle X_n le cardinal de l'ensemble aléatoire $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ c'est à dire le nombre d'objets différents qui ont été tirés du tirage n°1 au tirage n°n [12], soit

$$\forall n \geqslant 0, \quad X_n = \operatorname{Card}(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \tag{7}$$

Par exemple, X_0 est le cardinal 0 de l'ensemble vide et $X_1 = 1$ [13]. Posons $\mathscr{E} = (0, 1, 2, \ldots, N)$. $\mathscr{E}$ est l'ensemble des valeurs prises par les variables aléatoires X_n, $n \geqslant 0$ (X_0 comprise).

On démontre, voir le théorème 1, que $\mathscr{X}$ est une chaîne de Markov d'espace des états $\mathscr{E}$, de loi initiale

$$L_0 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \tag{8}$$

[14] et de matrice de transition [15] :

$$T = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} 0 & N & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & N-1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & N-2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & & & & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N-1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N \end{pmatrix} \tag{9}$$

2.2 Des temps d'arrêt

On sait que

$$\forall n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in (1, 2, \ldots, N), \qquad \mathbb{P}(Y_n = i) = \frac{1}{N} \tag{10}$$

8. Les départements ayant été numérotés de 1 à 101.
9. L'expression « tirage au sort » signifie comme d'habitude que les 101 issues possibles sont équiprobables. C'est la traduction de la proposition « les aimantins étant répartis de manière uniforme »
10. Par exemple, si l'on tire toujours le même département au cours des n premiers tirages, il faudra faire plus de n tirages pour avoir la collection complète. Cet argument vaut quel que soit n.
11. Dans toute la suite, on suppose $N \geqslant 2$ pour éviter un cas trivial.
12. Comprendre que pour tout ω appartenant à Ω, $X_n(\omega) = \operatorname{Card}(Y_1(\omega), Y_2(\omega), \ldots, Y_n(\omega))$. $X_n(\omega) \leqslant n$ car dans un ensemble, il n'y a pas de répétitions.
13. X_0 et X_1 sont des variables aléatoires constantes égales respectivement à 0 et à 1.
14. L_0 est une matrice-ligne de longueur $N+1$.
15. T est une matrice $(N+1) \times (N+1)$.

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_n = i)$ est donc divergente. Comme $((Y_n = i)\,,\, n \geqslant 1)$ est une suite indépendante d'événements, d'après le second lemme de Borel-Cantelli (cf. [3], p.245) [16], [17]

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \mathbb{P}\left(\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(Y_n = i)\right) = 1$$

Si l'on pose

$$\Omega^* = \left(\bigcap_{i=1}^{N} \overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(Y_n = i)\right)$$

on en déduit que [18]

$$\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$$

Tout point ω de Ω^* correspond donc à une suite de tirages au cours desquels chacun des N objets est tiré une infinité de fois, ce qui implique que l'état N et tous les états intermédiaires sont atteints par la chaîne $\mathscr{X}$. On peut donc définir sur Ω^* les fonctions suivantes :

$$\text{Pour} \quad p = 1,\, \ldots,\, N \quad \text{et} \quad \forall \omega \in \Omega^*, \quad \mathscr{T}_p(\omega) = \min\left(n,\, n \geqslant 1,\, X_n(\omega) = p\right) \tag{11}$$

En clair, $\mathscr{T}_p$ est l'instant aléatoire où le nombre d'objets différents acquis par le collectionneur atteint p. En particulier, $\mathscr{T}_N$ est la fonction qui nous intéresse : c'est le premier instant où le collectionneur possède le collection complète. Les fonctions $\mathscr{T}_1,\ldots, \mathscr{T}_N$ prennent des valeurs entières $\geqslant 1$ et vérifient évidemment les inégalités suivantes :

$$\forall \omega \in \Omega^*, \quad \mathscr{T}_1(\omega) = 1 < \mathscr{T}_2(\omega) < \cdots < \mathscr{T}_N(\omega)$$

D'après une remarque déjà faite, elles ne sont pas bornées. Il est facile de montrer que pour $p = 1,\, \ldots,\, N$, $\mathscr{T}_p$ prend avec probabilité > 0 toute valeur entière $\geqslant p$ [19].

Comme elles sont définies sur l'événement Ω^* qui est un événement certain, on dit qu'elles sont presque sûrement définies. On peut les prolonger en leur donnant la valeur 0 sur $\Omega \setminus \Omega^*$ [20], [21]. Il est facile de démontrer que les fonctions $\mathscr{T}_1,\, \ldots,\, \mathscr{T}_N$ ainsi prolongées sont des variables aléatoires sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. Elles sont d'un type particulier, les « temps d'arrêt » qui joue un rôle très important en théorie des processus stochastiques, en particulier dans l'étude des chaînes de Markov.

2.3 Formulation mathématique du problème posé

On demande de calculer $E(\mathscr{T}_N)$, espérance mathématique de $\mathscr{T}_N$ qui est une variable aléatoire prenant effectivement (avec probabilité > 0) les valeurs N, $N+1$, $N+2$, … [22]. On pourrait *estimer* cette espérance en simulant la chaîne de Markov, grâce à la loi des grands nombres.

16. Ce « lemme » est en fait un théorème très important et archi-connu du Calcul des Probabilités.

17. L'événement $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\,(Y_n = i)$ est l'ensemble des points ω de Ω qui appartiennent à une infinité d'événements de la suite $((Y_n = i)\,,\, n \geqslant 1)$. Il s'appelle limite supérieure de cette suite d'événements.

18. Toute intersection d'une famille finie d'événements certains est un événement certain.

19. Pour tout entier $k \geqslant p$, $(T_p = k) \supseteq (Y_1 = 1,\, Y_2 = 2,\, \ldots, Y_{p-1} = p-1,\, Y_p = p-1,\, \ldots, Y_{k-1} = p-1,\, Y_k = p)$, cet événement étant l'intersection de k événements indépendants de même probabilité $\frac{1}{N}$. On en déduit que $\mathbb{P}(T_p = k) \geqslant \frac{1}{N^k} > 0$.

20. $\Omega \setminus \Omega^*$ est le complémentaire de Ω^* dans Ω.

21. Un probabiliste professionnel ne ferait pas ce prolongement parce que c'est inutile. S'il le faisait, il donnerait probablement la valeur $+\infty$ aux fonctions $\mathscr{T}_1,\, \ldots,\, \mathscr{T}_N$ sur $\Omega^* \setminus \Omega$. Cela suppose l'utilisation de certaines conventions de calcul, c'est pourquoi nous avons choisi 0.

22. L'espérance d'une variable aléatoire discrète prenant une infinité de valeurs avec probabilités > 0, voir les rappels, est clairement hors programme au lycée.

Mais ici, on peut déterminer les lois des variables aléatoires $\mathscr{T}_2-\mathscr{T}_1,\, \ldots,\, \mathscr{T}_N-\mathscr{T}_{N-1}$. On verra que ce sont des lois géométriques. Comme leurs espérances sont connues, voir (4) et que

$$\mathscr{T}_N=\mathscr{T}_1+\sum_{k=2}^{N}\left(\mathscr{T}_k-\mathscr{T}_{k-1}\right)=1+\sum_{k=2}^{N}\left(\mathscr{T}_k-\mathscr{T}_{k-1}\right) \tag{12}$$

il suffira d'utiliser l'égalité

$$E\left(\mathscr{T}_N\right)=1+\sum_{k=2}^{N}E\left(\mathscr{T}_k-\mathscr{T}_{k-1}\right) \tag{13}$$

pour calculer $E\left(\mathscr{T}_N\right)$.

3 Énoncés et démonstrations

Théorème 1 *La suite $\mathscr{X}=(X_n,\, n\geqslant 0)$ de variables aléatoires définies par (7) à partir d'une suite $(Y_n,\, n\geqslant 1)$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$, indépendantes et prenant toutes les valeurs $1,\, 2,\, \ldots,\, N$ avec la probabilité $\dfrac{1}{N}$ est une chaîne de Markov d'espace des états $\mathscr{E}=(0,\, 1,\, \ldots,\, N)$, de loi initiale L_0 donnée par (8) et de matrice de transition donnée par (14).* □

Démonstration : Nous nous référons à la définition des chaînes de Markov donnée dans [4] [23]. Il est clair que L_0 est la loi de X_0 puisque $X_0=0$. Il reste à vérifier que quel que soit l'entier $n\geqslant 0$ et quels que soient les états $i_0,\, i_1,\, \ldots,\, i_{n-1},\, i_n,\, i_{n+1}$ tels que

$$\mathbb{P}(X_0=i_0,\ldots,\, X_{n-1}=i_{n-1},\, X_n=i_n)>0 \tag{14}$$

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1}=i_{n+1}/X_0=i_0,\, \ldots,\, X_{n-1}=i_{n-1},\, X_n=i_n\right)=T(i_n,i_{n+1}) \tag{15}$$

Supposons donc que la condition (14) est vérifiée. Cela implique $i_0=0$ et, si $n\geqslant 1$, $i_1=1$ ainsi que $i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_n$.
Soit A l'ensemble de tous les n-uples $(y_1,\, \ldots,\, y_n)$ d'éléments de $(1,\, 2,\, \ldots,\, N)$ [24] tels que

$$\mathrm{Card}\left(\{y_1\}\right)=i_1,\, \mathrm{Card}\left(\{y_1,y_2\}\right)=i_2,\, \ldots,\, \mathrm{Card}\left(\{y_1,\, \ldots,\, y_n\}\right)=i_n$$

L'événement $(X_1=i_1,\, \ldots,\, X_n=i_n)$ est la réunion des événements $(Y_1=y_1,\, \ldots,\, Y_n=y_n)$ quand $(y_1,\, \ldots,\, y_n)$ décrit A. Ils sont deux à deux disjoints. On en déduit que

$$\mathbb{P}(X_0=i_0,\ldots,\, X_{n-1}=i_{n-1},\, X_n=i_n)=\frac{\mathrm{Card}\,(A)}{N^n} \tag{16}$$

puisque les événements $(Y_1=y_1,\, \ldots,\, Y_n=y_n)$ ont pour probabilité $\dfrac{1}{N^n}$ [25] et que $(X_0=0)=\Omega$.
Soit B l'ensemble de tous les $(n+1)$-uples $(y_1,\, \ldots,\, y_{n+1})$ d'éléments de $(1,\, 2,\, \ldots,\, N)$ tels que

$$\mathrm{Card}\left(\{y_1\}\right)=i_1,\, \ldots,\, \mathrm{Card}\left(\{y_1,\, \ldots,\, y_n\}\right)=i_n,\, \mathrm{Card}\left(\{y_1,\, \ldots,\, y_{n+1}\}\right)=i_{n+1}$$

L'événement $(X_1=i_1,\, \ldots,\, X_{n+1}=i_{n+1})$ est la réunion des événements deux à deux disjoints $(Y_1=y_1,\, \ldots,\, Y_{n+1}=y_{n+1})$ quand $(y_1,\, \ldots,\, y_{n+1})$ décrit B. De plus, d'après la condition (14), $i_{n+1}=i_n$ ou $i_{n+1}=i_n+1$.

23. Une définition des chaînes de Markov dans un cours peut apparaître comme une propriété caractéristique dans un autre. Il y a donc des définitions diverses et équivalentes d'une chaîne de Markov.
24. $\Longrightarrow A\subseteq(1,\, 2,\, \ldots,\, N)^n$
25. La loi commune des variables aléatoires des $Y_1,\, Y_2,\, \ldots$ et leur indépendance interviennent ici.

Traitons le cas $i_{n+1} = i_n$: B peut encore s'écrire

$$B = \bigcup_{(y_1,\ldots,y_n)\in A} \left(\bigcup_{y\in(y_1,\ldots,y_n)} \{(y_1,\,\ldots,\,y_n, y)\} \right)$$

[26] d'où l'on déduit

$$\text{Card}\,(B) = i_n\cdot \text{Card}\,(A)$$

Comme précédemment, il en résulte que

$$\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots,\, X_{n-1} = i_{n-1},\, X_n = i_n,\, X_{n+1} = i_{n+1}) = \frac{\text{Card}\,(B)}{N^{n+1}} = \frac{i_n}{N}\cdot \frac{\text{Card}\,(A)}{N^n} \tag{17}$$

D'après la définition des probabilités conditionnelles, (16) et (17), on en déduit, dans le cas $i_{n+1} = i_n$, que

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_n / X_0 = i_0,\, \ldots,\, X_{n-1} = i_{n-1},\, X_n = i_n\right) = \frac{i_n}{N} = T(i_n, i_n)$$

Cela implique, par passage au complémentaire :

$$\mathbb{P}\left(X_{n+1} = i_n + 1 / X_0 = i_0,\, \ldots,\, X_{n-1} = i_{n-1},\, X_n = i_n\right) = \frac{N - i_n}{N} = T(i_n, i_n + 1)$$

ce qu'il fallait démontrer. ■

Nous allons maintenant utiliser une propriété très particulière de la chaîne de Markov $\mathscr{X}$: elle est croissante.

Théorème 2 *Convergence de la chaîne de Markov* $\mathscr{X}$ *:*

$$X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} N. \quad \square$$

Démonstration : On est dans un cas très simple : pour tout point ω de Ω, la suite de nombres entiers $(X_n(\omega)\,,\; n \geqslant 0)$ est croissante (au sens large) et majorée par N, cf. (7). Par conséquent, elle converge vers un nombre entier. On peut préciser : pour tout point ω de Ω^*, la suite $(X_n(\omega)\,,\; n \geqslant 0)$ prend la valeur N. À partir du moment où elle atteint N, elle reste constante et égale à N. Par conséquent, N est sa limite. Cela termine la démonstration puisque $\mathbb{P}(\Omega^*) = 1$. Sur $\Omega \setminus \Omega^*$, il y a aussi convergence mais la limite est sans intérêt, cet événement étant de probabilité 0. ■

Le théorème qui suit n'est pas utilisé dans la suite. C'est un résultat qui est seulement suggéré dans [2] sur la base du calcul de premières puissances de T, dans le cas $N = 5$.

Théorème 3 *Convergence des puissances de la matrice de transition* T *de* $\mathscr{X}$ *:*

$$T^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{matrice } (N+1)\times(N+1). \quad \square$$

26. Dans cette égalité ensembliste, la réunion sur y est la réunion de $\text{Card}\,(\{y_1,\,\ldots,\,y_n\}) = i_n$ ensembles réduits à un élément, qui est un $(n+1)$-uple.

Démonstration : pour tout indice $i \in (1,\, 2,\, \dots,\, N)$, $\mathbb{P}\left(X_i = i\right) > 0$ puisque

$$(X_i = i) \supseteq (Y_1 = 1,\, Y_2 = 2,\, \dots,\, Y_i = i) \Longrightarrow \mathbb{P}\left(X_i = i\right) \geqslant \prod_{j=1}^{i} \mathbb{P}\left(Y_j = j\right) = \frac{1}{N^i} > 0$$

C'est vrai aussi pour $i = 0$ puisque $(X_0 = 0) = \Omega$. On peut donc conditionner par l'événement $(X_i = i)$, $i \geqslant 0$, et écrire, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout élément j de $(1,\, 2,\, \dots,\, N)$:

$$\mathbb{P}\left(X_{i+n} = j / X_i = i\right) = T^n(i, j) = \frac{\mathbb{P}\left(X_i = i, X_{i+n} = j\right)}{\mathbb{P}\left(X_i = i\right)}$$

Si $j < N$, on en déduit :

$$T^n\left(i, j\right) \leqslant \frac{\mathbb{P}\left(X_{i+n} = j\right)}{\mathbb{P}\left(X_i = i\right)} \tag{18}$$

D'après le théorème 2 et (5), il en résulte que

$$\mathbb{P}\left(X_{i+n} = j\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}\left(N = j\right) = 0$$

ce qui prouve d'après (18) que

$$T^n\left(i, j\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

autrement dit, les coefficients des N premières colonnes de T^n convergent vers 0 quand $n \to +\infty$. Comme la somme des coefficients de chaque ligne vaut 1, on en déduit que

$$T^n\left(i, N\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1. \quad \blacksquare$$

Pour raccourcir la rédaction du théorème suivant, nous posons $\mathscr{T}_0 = 0$.

Théorème 4 *Pour* $j = 2,\, \dots,\, N$, $\mathscr{T}_j - \mathscr{T}_{j-1}$ *suit la loi géométrique de paramètre* $\dfrac{N-j+1}{N}\cdot$ $\square$

Démonstration : Soit k un entier $\geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
(\mathscr{T}_j - \mathscr{T}_{j-1} = k) &= \bigcup_{m=j-1}^{+\infty} (\mathscr{T}_j - \mathscr{T}_{j-1} = k,\ \mathscr{T}_{j-1} = m) \\
&= \bigcup_{m=j-1}^{+\infty} (X_{m-1} = j-2,\ X_m = j-1,\ \dots,\ X_{m+k-1} = j-1,\ X_{m+k} = j)
\end{aligned}$$

Ces événements[27] sont deux à deux disjoints. La probabilité de leur réunion est donc la somme de la série de leurs probabilités[28]. Compte tenu de (6), cela s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\mathscr{T}_j - \mathscr{T}_{j-1} = k\right) &= \sum_{m=j-1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X_{m-1} = j-2,\ X_m = j-1,\ \dots,\ X_{m+k-1} = j-1,\ X_{m+k} = j\right) \\
&= \left(\sum_{m=j-1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X_{m-1} = j-2\right)\right) \cdot \frac{N-j+2}{N} \cdot \left(\frac{j-1}{N}\right)^{k-1} \cdot \frac{N-j+1}{N} \\
&= \alpha \cdot \frac{N-j+2}{N} \cdot pq^{k-1} \qquad (19)
\end{aligned}$$

27. écrits de 2 manières différentes
28. σ-additivité de $\mathbb{P}$

en posant

$$\alpha = \sum_{m=j-1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(X_{m-1} = j-2\right), \quad p = \frac{N-j+1}{N}, \quad q = 1-p = \frac{j-1}{N}$$

Pour trouver la valeur de α, il suffit de sommer sur k :

$$1 = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha \cdot \frac{N-j+2}{N} \cdot pq^{k-1} = \alpha \cdot \frac{N-j+2}{N} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} = \alpha \cdot \frac{N-j+2}{N}$$

car la somme de la série des masses ponctuelles de la loi géométrique de paramètre p est évidemment 1. En reportant dans (19), on obtient :

$$\mathbb{P}\left(\mathscr{T}_j - \mathscr{T}_{j-1} = k\right) = pq^{k-1}. \quad \blacksquare \tag{20}$$

Théorème 5

$$E\left(\mathscr{T}_N\right) = 1 + \sum_{j=2}^{N} \frac{N}{N-j+1} = N\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N}\right) \cdot \quad \square \tag{21}$$

Démonstration : On déduit (21) de (13) et de (4). $\blacksquare$

4 Un peu de calcul matriciel exact

Ce qui suit illustre le théorème 3 et se trouve aussi dans [2], p. 49. Il s'agit du calcul de T^{10}, T^{20} et T^{30} à l'aide de Xcas. Le calcul se fait en nombres rationnels et est exact. Il suffit d'exécuter les instructions suivantes :

```
T:=matrix([0,1,0,0,0,0],[0,1/5,4/5,0,0,0],
[0,0,2/5,3/5,0,0],[0,0,0,3/5,2/5,0],[0,0,0,0,4/5,1/5],[0,0,0,0,0,1];
supposons(n,integer);
Puissance(n):=matpow(T,n);
Puissance(10);
Puissance(20);
Puissance(30);
```

Ces 3 puissances de T font effectivement penser au théorème 3. Reportons seulement T^{30} :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{19073486328125} & \frac{2097148}{19073486328125} & \frac{6967277352}{19073486328125} & \frac{1085570781624}{19073486328125} & \frac{143847569376}{152587890625} \\ 0 & \frac{1}{95367431640625} & \frac{167772}{3814697265625} & \frac{167264988}{762939453125} & \frac{174248707248}{3814697265625} & \frac{90990301641624}{95367431640625} \\ 0 & 0 & \frac{1048576}{95367431640625} & \frac{418288299}{3814697265625} & \frac{131104692906}{3814697265625} & \frac{92079356061924}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3486784401}{95367431640625} & \frac{17536397494}{762939453125} & \frac{93171895169474}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1099511627776}{95367431640625} & \frac{94267920012849}{95367431640625} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Références

[1] B.O. spécial n°8 du 13 octobre 2011. *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique*
http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

[2] *Ressources pour la classe terminale générale et technologique Mathématiques Série S Enseignement de spécialité*
http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/62/6/ressource_specialite_v5_210626.pdf

[3] Olivier Garet et Aline Kurtzmann *De l'intégration aux probabilités*, Ellipses, Paris (2011)

[4] Raymond Moché *Introduction aux chaînes de Markov*
http://gradus-ad-mathematicam.fr/Exposes2.htm