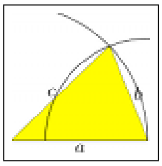


Triangles et loi des grands nombres

Question 1 : À combien estimez-vous la fréquence F des triangles constructibles lorsqu'on choisit, au hasard, les longueurs des côtés parmi les nombres entiers de 1 à 15 ?

Question 2 : F est voisine de $\frac{1}{2}$. Y a-t-il une explication ?

De manière plus détaillée, on choisit au hasard 3 entiers a, b et c dans l'ensemble $(1, \ldots, 15)$. Ces nombres peuvent-ils être les longueurs des côtés d'un triangle (non aplatis) ? avec quelle fréquence ?

1 Deux réponses algorithmiques à la question 1

Bien sûr, il y a $15^3 = 3375$ manières de choisir le triplet (a, b, c). Si on appelle N le nombre de triplets à partir desquels on peut construire un triangle, la fréquence demandée est le nombre

$$\boxed{F = \frac{N}{3375}} \tag{1}$$

C'est donc un simple *problème de dénombrement*.

Première solution : Comme les nombres mis en œuvre ne sont pas très grands, cela peut se faire avec un tableur [1]. Il suffit, dans les 3 premières colonnes, d'écrire toutes les valeurs possibles du triplet (a, b, c) (sur 3375 lignes) et de compter les triplets qui vérifient la double inégalité suivante, cf. notre feuille de calcul « TrianglesLoi » [2] :

$$\boxed{|b - c| < a < b + c} \tag{2}$$

Bien sûr, le jeu consiste à saisir les 3375 triplets sans fatigue excessive. Pour cela, on peut programmer la saisie, ce qui requiert un peu d'astuce, voir « TrianglesLoi ». Ensuite, il reste à compter les bons triplets, ce qui est plus facile. On obtient

$$\boxed{N = 1695, \quad F \approx 0.502} \tag{3}$$

Ces calculs ne peuvent pas être faits par des élèves de Cinquième [3]. Tout au plus peut-on leur montrer et leur expliquer la feuille de calcul.

Autre solution : Nous ne résistons pas à la tentation de traiter le même problème avec « scilab ». La programmation de l'algorithme est courte et facile ; on retrouve le résultat précédent très vite et sans aucun effort. Voici ce que donne l'exécution de l'algorithme.

Listing 1 – Triangles et loi des grands nombres

```
compteur=0;
for a=1:15
   for b=1:15
      for c=1:15
```

1. Nous utilisons le tableur « Calc » de OpenOffice.
2. On écarte les triangles aplatis en utilisant des inégalités strictes.
3. Nous faisons ici référence à [1].

```
      if ((abs(b-c)<a) & (a<(b+c))) then
        compteur=compteur+1;
      end
    end
  end
end
f=compteur/15^3;
```

Listing 2 – Sortie de l'algorithme précédent

```
!la fréquence recherchée est  0.5022222222222  !
```

2 Interprétation probabiliste du problème

Dès la classe de Troisième et mieux en Seconde, on peut voir dans l'exercice ci-dessus un problème de Calcul des probabilités.

On peut imaginer en effet que a, b et c sont les valeurs prises par 3 variables aléatoires indépendantes X, Y et Z prenant leurs valeurs dans l'ensemble $(1, \ldots, 15)$ (par exemple, une urne contient 15 boules indistinguables au toucher et numérotées de 1 à 15 : on touille, on tire une boule, on note son numéro, qui est la valeur prise par X, on la remet dans l'urne et on recommence pour avoir les valeurs prises par Y et Z). Il est clair que toutes les valeurs possibles du triplet (X, Y, Z), c'est à dire tous les triplets (a, b, c), sont équiprobables. Notons Ω l'ensemble de ces triplets. Comme il y en a $15^3 = 3375$, chacun d'eux a donc la probabilité $\frac{1}{3375}$. On est donc dans une *situation d'équiprobabilité* comme dit le programme de Seconde. On en déduit que si E désigne l'événement « le triplet (a, b, c) vérifie la double inégalité (2) », autrement dit « Il existe un triangle non aplati ABC tel que $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ », la probabilité de E est

$$P(E) = \frac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}} = \frac{N}{3375} = F \tag{4}$$

3 Réponse à la question 2

Cette question était d'autant plus légitime que les fréquences calculées lorsque les longueurs a, b et c étaient tirées au hasard entre 1 et n, n prenant des valeurs de plus en plus grandes, semblaient se rapprocher de $\frac{1}{2}$.

Au lieu de tirer les nombres a, b et c dans l'ensemble $(1, \ldots, 15)$, tirons-les de l'ensemble $(1, \ldots, n)$, où n désigne un entier ≥ 1 et affinons nos notations : l'événement E devient E_n, la fréquence F devient F_n.

Il est clair que le problème n'est pas changé si a, b et c sont tirés au hasard dans l'ensemble $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$.

On va voir que cette remarque est essentielle.

On se convainc facilement que « tirer un nombre au hasard dans $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$ » est très proche de « tirer un nombre réel au hasard dans l'intervalle $[0\,, 1]$ » et que ceci est d'autant plus vrai que n est grand[4].

4. **Preuve** : Pour tout entier $n \geq 1$, soit U_n la variable aléatoire égale au nombre qui sort quand on tire au hasard un élément de l'ensemble $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$ et U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,, 1]$, c'est

Il en résulte que si pour tout entier $n \geq 1$, U_n, V_n et W_n désignent 3 variables aléatoires indépendantes prenant leurs valeurs dans l'ensemble $(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n})$ avec la probabilité $\frac{1}{n}$ et si U, V et W sont 3 variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,1]$, voir la note précédente, la suite de vecteurs aléatoires $\big((U_n, V_n, W_n), n \geq 1\big)$ converge en loi vers (U, V, W) [5].

Si l'on pose

$$\Delta = \Big((u, v, w); 0 \leq u,\, v,\, w \leq 1; |v - w| < u < v + w\Big) \tag{5}$$

on en déduit [6] que

$$P\big((U_n, V_n, W_n) \in \Delta\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\big((U, V, W) \in \Delta\big) \tag{6}$$

Il reste à remarquer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} & P\big((U_n, V_n, W_n) \in \Delta\big) \\ = \;& P\Big((U_n, V_n, W_n) = (a, b, c)\,;\, a, b, c \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}),\, |b - c| < a < b + c\Big) \\ = \;& P(E_n) = F_n \end{aligned} \tag{7}$$

et que

$$P((U, V, W) \in \Delta) = vol(\Delta) \tag{8}$$

parce que la loi commune des variables aléatoires U, V et W étant la loi uniforme sur l'intervalle $[0\,,\,1]$, c'est à dire la restriction de la mesure de Borel-Lebesgue à cet intervalle, et ces variables aléatoires étant indépendantes, la loi du vecteur aléatoire (U, V, W) est la restriction de la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbf{R}^3$ au cube $[0\,,\,1]^3$, qui se confond avec le volume usuel dans le cas de solides simples comme Δ. Comme $vol(\Delta) = \dfrac{1}{2}$ [7], on peut conclure que

---

à dire une variable aléatoire dont la probabilité de tomber dans tout sous-intervalle de $[0\,,\,1]$ est la longueur de ce sous-intervalle. Habituellement U est la variable aléatoire égale au nombre qui sort quand on tire au hasard un nombre réel de l'intervalle $[0\,,\,1]$. La suite $(U_n, n \geq 1)$ converge en loi vers U, d'après la définition de la convergence en loi, parce que pour toute fonction continue $f\,:\,[0\,,\,1] \longrightarrow \mathbf{R}$,

$$\mathrm{E}\Big(f(U_n)\Big) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(\frac{i}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,dx$$

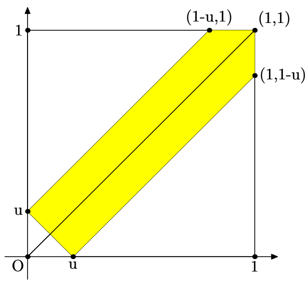
(cette limite est un résultat bien connu sur les sommes de Riemann).

5. Pour des vecteurs aléatoires, évidemment de même dimension, à composantes indépendantes, la convergence en loi équivaut à la convergence en loi composante par composante.

6. d'après le théorème de Billingsley-Alexandrov

7. Preuve de l'égalité $vol(\Delta) = \dfrac{1}{2}$: soit Δ_u la section de Δ en u, $0 \leq u \leq 1$, autrement dit

$$\Delta_u = \big((v, w)\,;\, 0 \leq v, w \leq 1\,;\, |v - w| < u < v + w\big)$$



L'aire de Δ_u est

$$a(\Delta_u) = 2u - \frac{3}{2}u^2$$

$$F_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{2}$$

Il est donc normal que la fréquence F_n soit voisine de $\frac{1}{2}$ quand n est grand.

Références

[1] Odile Guyon : *Inégalités triangulaires et fréquences*, activité proposée sur le site de l'IREM de Lille pour la classe de Cinquième, en géométrie.
http://irem.univ-lille1.fr/activites/spip.php?article162

On en déduit, compte tenu de la définition des mesures-produits, que

$$vol(\Delta) = \int_0^1 a(\Delta_u)\, du = \int_0^1 (2u - \frac{3}{2}u^2)\, du = \frac{1}{2}$$

ce qu'il fallait démontrer.