4	9	2
3	5	7
8	1	6

Quelques remarques et algorithmes sur les carrés magiques

Ce texte ne parle pratiquement que de carrés magiques d'ordre impair. Il est accompagné de 3 fichiers *scilab* :

NombreCM, qui donne le nombre de carrés magiques d'ordre n, quel que soit l'entier $n \geq 3$. Ce fichier n'est pratiquement utilisable que pour $n = 3$.

Bachet, qui associe à tout entier $n \geq 3$, impair, un carré magique d'ordre n construit suivant la méthode de Claude-Gaspard Bachet.

Siam, qui associe à tout entier $n \geq 3$, impair, un carré magique d'ordre n construit suivant une méthode indienne rapportée du Siam par Simon de La Loubère.

1 Introduction

Des carrés magiques sont connus depuis longtemps. Ils auraient été inventés en Chine ancienne, voir [4]. Pour nous, un carré magique d'ordre n (entier ≥ 3) est un tableau à n lignes et n colonnes (une matrice carrée) formé avec les entiers de 1 à n^2, chacun d'eux étant utilisé une seule fois, de sorte que la somme des nombres sur toutes les lignes, toutes les colonnes ainsi que sur les deux diagonales soient égales à un même nombre s_n [1]. Le cas $n = 1$ est dégénéré et ne présente donc aucun intérêt. De plus, il est assez évident qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2. Pour tout entier $n \geq 3$, s_n vérifie :

$$n \cdot s_n = \sum_{i=1}^{n^2} i = \frac{n^2(n^2+1)}{2} \cdot$$

(en additionnant les nombres ligne par ligne puis en additionnant les sommes obtenues (premier membre) ou en additionnant tous directement). On en déduit que

$$s_n = \frac{n(n^2+1)}{2} \cdot$$

Appelons ce nombre *constante magique d'ordre n* comme dans [4].

Carrés magiques d'ordre 3

On peut se demander s'il existe un carré magique d'ordre 3 et essayer d'en écrire un en tâtonnant. Ce n'est pas si simple.

1 - La constante magique d'ordre 3 est $s_3 = \frac{3(3^2+1)}{2} = 15$. Un mathématicien se dira que si les nombres a, b, c et d du tableau

a	b	
c	d	

sont le début d'un carré magique, la somme des nombres sur la ligne 1 puis 2, sur la colonne 1 puis 2 et enfin sur la première diagonale étant 15, les nombres manquants sont respectivement $15-(a+b)$, $15-(c+d)$, $15-(a+c)$, $15-(b+d)$ et $15-(a+d)$. Si nous avons un carré magique, la somme des

1. Dans [4], ces carrés magiques sont appelés *normaux.*

nombres sur la ligne 3, la colonne 3 et sur la deuxième diagonale est 15, autrement dit un système de 2 équations (car une équation apparaît deux fois) est vérifié :

$$\begin{cases} 30 &= 2a+b+c+2d \\ 15 &= 2a+b+c-d \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} d &= 5 \\ 2a+b+c &= 20 \end{cases} \tag{1}$$

Les nombres $a=4$, $b=9$, $c=3$, $d=5$ d'une part, $a=8$, $b=1$, $c=3$, $d=5$ d'autre part vérifient le système précédent. On vérifie que ces choix conduisent effectivement à deux carrés magiques d'ordre 3. Ils se trouvent dans la colonne de gauche de la figure 1.1 ci-dessous.

Ensuite, on peut remarquer que si on fait tourner un carré magique de $\frac{\pi}{2}$ radians autour du coin en bas à droite dans le sens des aiguilles d'une montre, on obtient encore un carré magique. En répétant ces rotations sur les 2 carrés magiques que nous venons d'obtenir, nous obtenons finalement 8 carrés magiques d'ordre 3 différents :

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

4	3	8
9	5	1
2	7	6

2	9	4
7	5	3
6	1	8

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Figure 1.1.

La question qui se pose alors est : a-t-on obtenu tous les carrés magiques d'ordre 3 ? La réponse est oui. Cela devrait pouvoir se déduire du système (1). Nous préférons une solution algorithmique : l'algorithme *NombreCM*, particulièrement rustique, engendre, pour tout entier n pair ou impair, toutes les matrices carrées $(n \times n)$ dont l'ensemble des éléments est $(1, 2, \ldots, n^2)$ et compte ceux qui sont magiques. Cette méthode a malheureusement besoin de beaucoup de mémoire : elle utilise en effet une matrice de taille $((n^2)! \times n^2)$ soit 362880×9 si $n = 3$. *scilab* a pu exécuter le calcul dans ce cas mais a manqué de mémoire dès que $n = 4$!

2 Carrés magiques d'ordre impair : méthode de Bachet

Claude-Gaspard Bachet semble être l'auteur de cette méthode élégante qui daterait donc du début du XVII$^{\text{ème}}$ siècle, cf. [5]. Elle permet de fabriquer, pour tout entier impair $n \geq 3$, un carré magique d'ordre n. Ce texte est accessible en ligne : il s'agit du problème XXI de [1], pp. 88-114.

Description de la méthode de Bachet

On commence par placer dans un tableau carré de $(2n-1) \times (2n-1)$ cases la liste des entiers de 1 à n^2 disposés comme dans le premier carré (l'exemple traité correspond au cas $n = 7$). On a mis en exergue en jaune le tableau formé des $\frac{n-1}{2}$ premières lignes et en vert le tableau formé des $\frac{n-1}{2}$ lignes consécutives à partir de la ligne de rang $n+1$:

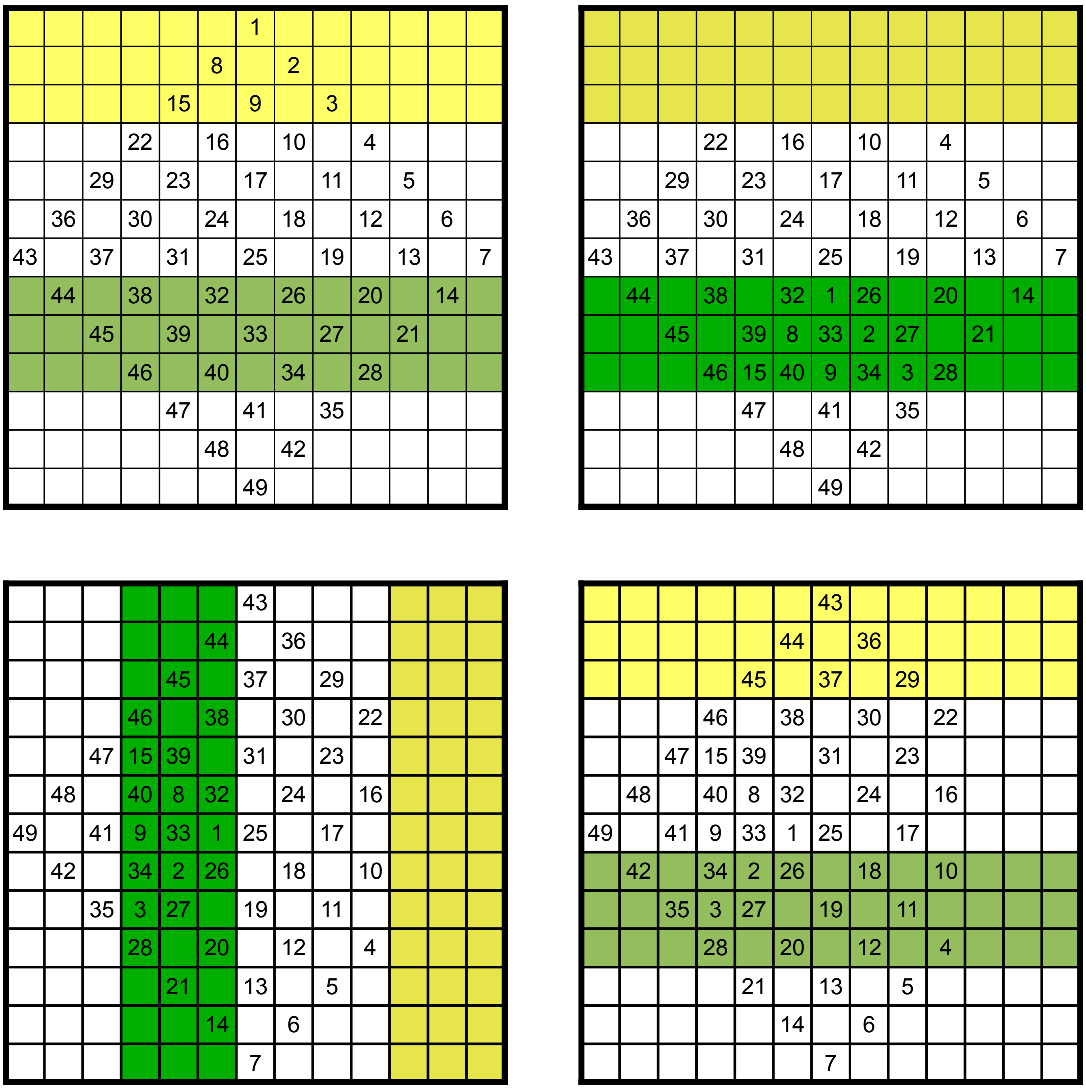

Figure 2.1.

On a obtenu le second carré en faisant glisser le rectangle jaune du premier carré sur le rectangle vert. Le troisième a été obtenu en tournant le deuxième carré de $\frac{\pi}{2}$ radians dans le sens rétrograde autour de son sommet en bas à droite. Le quatrième carré est identique au troisième aux couleurs près. Nous avons restitué les couleurs du premier pour indiquer que nous allons recommencer 3 fois les mêmes manipulations. On obtient alors le carré suivant :

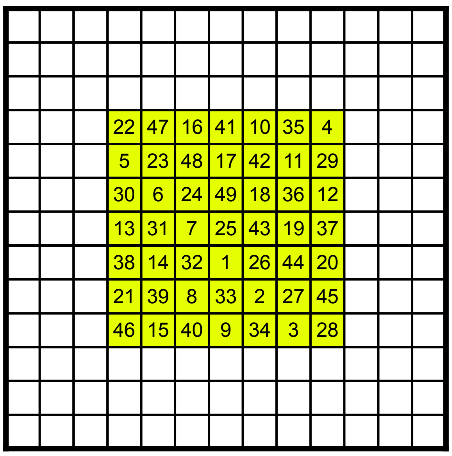

Figure 2.2.

On peut vérifier que le carré central jaune est un carré magique d'ordre 7.

Autres exemples

1 - Le premier des carrés magiques de la figure 1.1 est le carré magique d'ordre 3 obtenu par la méthode de Bachet.

2 -Voici le carré magique d'ordre 13 fourni par la méthode de Bachet :

79	164	67	152	55	140	43	128	31	116	19	104	7
8	80	165	68	153	56	141	44	129	32	117	20	92
93	9	81	166	69	154	57	142	45	130	33	105	21
22	94	10	82	167	70	155	58	143	46	118	34	106
107	23	95	11	83	168	71	156	59	131	47	119	35
36	108	24	96	12	84	169	72	144	60	132	48	120
121	37	109	25	97	13	85	157	73	145	61	133	49
50	122	38	110	26	98	1	86	158	74	146	62	134
135	51	123	39	111	14	99	2	87	159	75	147	63
64	136	52	124	27	112	15	100	3	88	160	76	148
149	65	137	40	125	28	113	16	101	4	89	161	77
78	150	53	138	41	126	29	114	17	102	5	90	162
163	66	151	54	139	42	127	30	115	18	103	6	91

Figure 2.3.

Algorithme de la méthode de Bachet : Quel que soit l'entier $n \geq 3$ impair, l'algorithme *Bachet* fournit la matrice $(n \times n)$ défini par la méthode de Bachet et vérifie qu'il s'agit bien d'un carré magique d'ordre n. Avec le système dont nous disposons, nous avons calculé assez rapidement un carré magique d'ordre 1201 à l'aide de « *Bachet*. Nous n'avons pas cherché à savoir jusqu'où on peut aller.

3 Carrés magiques d'ordre impair : méthode siamoise

Comme la méthode de Bachet, la méthode siamoise, cf. [6], ne s'applique qu'aux carrés magiques d'ordre n impair et fournit, pour chaque valeur de n, un carré magique particulier. Très ancienne, elle est due à des mathématiciens indiens. Voici comment elle est décrite dans [6], dans le cas $n = 7$.

On commence par écrire une matrice $(n \times n)$ dont tous les éléments sont nuls sauf celui qui occupe la case $(1, \frac{n+1}{2})$ qui vaut 1 :

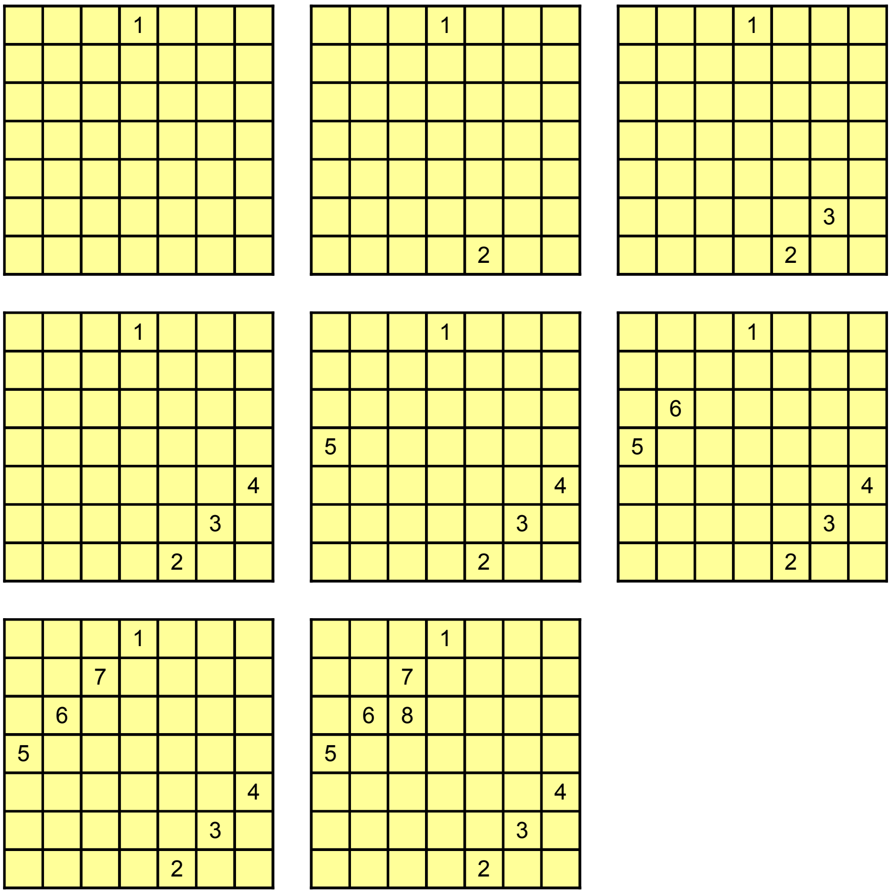

Figure 3.1.

Ensuite, supposons que l'on vienne de placer l'entier k dans la case (i,j). Si $i=1$ et $j=n$, ou, dans le cas contraire, si la case (i',j') [2] est déjà occupée, on place $k+1$ dans la case $(i+1,j)$; sinon, $k+1$ est placé dans la case (i',j') qui est libre. On s'arrête lorsque l'entier n^2 a été placé. En principe, toutes les cases sont alors occupées et forment un carré magique d'ordre n. Cela n'a rien d'évident. L'algorithme *Siam* exécute ce programme et pour les valeurs de n testées, nous avons effectivement obtenu un carré magique : la vérification est faite par *Siam*. On peut faire à la main le cas $n=7$ par exemple. La figure 3.1 montre comment sont placés successivement les entiers 2, …, 8. On obtient finalement le carré magique suivant :

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Figure 3.2.

Le carré magique d'ordre 3 donné par la méthode siamoise est le cinquième de la figure 1.1. Avec le système dont nous disposons, nous avons calculé un carré magique d'ordre 1201 à l'aide de *Siam*. Le calcul a paru plus long qu'avec la méthode de Bachet, sans doute à cause des nombreux tests à effectuer. Nous n'avons pas cherché à savoir jusqu'où on peut aller.

2. où $i'=i-1$ si $i>1$, n sinon et où $j'=j+1$ si $j<n$, 1 sinon

4 Conclusion

Les démonstrations des méthodes de Bachet et siamoise se trouveraient dans [1] et dans [6] respectivement. Bachet propose aussi une construction de carrés magiques d'ordre pair ([1]). Nous ne savons pas s'il existe une formule donnant le nombre de carrés magiques d'ordre pair ou impair donné. Comme d'habitude, même ici sur une question mineure comme les carrés magiques, qui ne sont qu'une curiosité, il n'est pas difficile de se poser des problèmes redoutables.

Références

[1] CLAUDE-GASPARD BACHET : *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres*, Cinquième édition revue, simplifiée et augmentée par A. Labosne, Paris, Gauthier-Villars (1884).
`http://cnum.cnam.fr/CGI/fpage.cgi?8PY45/91/130/246/0/0`

[2] PIERRE LAPÔTRE : *Programmation avec Xcas Carrés magiques impairs*
`http://irem.univ-lille1.fr/activites/spip.php?article179`

[3] SIMON DE LA LOUBÈRE : *A new historical relation of the kingdom of Siam* Ithaca, New York : Cornell University Library
`http://digital.library.cornell.edu/cgi/t/text/text-idx?c=sea;idno=sea130`

[4] WIKIPEDIA : *Carré magique (mathématiques)*
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Carre_magique_(mathematiques)`

[5] WIKIPEDIA : *Claude-Gaspard Bachet de Méziriac*
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Claude-Gaspard_Bachet_de_Meziriac`

[6] WIKIPEDIA (en anglais) : *Siamese method*
`http://en.wikipedia.org/wiki/Siamese_method`