Un tas de chaussures

Solution (scilab, Xcas)

CAPES
Proba/Stat

Auteur : Raymond Moché

Commentaires :

1 - Sur le plan mathématique, ce problème est une belle application de la formule de Poincaré[1], [2] écrite ici sous la forme :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n}\text{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right) \tag{1}$$

qui donne le nombre d'éléments (noté Card) de la réunion des ensembles supposés finis $A_1, \ldots, A_n$ en fonction de leur nombre d'éléments et des nombres d'éléments de leurs intersections deux à deux, trois à trois, *etc.* La démonstration de cette formule est rappelée en l'annexe.

2 - Sur le plan algorithmique, on utilise un logiciel de calcul numérique, *scilab* et un logiciel de calcul formel, *Xcas*. Les calculs auraient pu se faire avec *Xcas* seul. Dans la solution qui suit, on utilise d'abord *scilab* puis, quand on veut obtenir des résultats exacts, on passe à *Xcas*.

Fichiers téléchargeables : `Lois.sci`, `Lois.cas`, `pfixes.sci`.

Solution :

L'espace de probabilité qui représente ce problème est Ω muni de la tribu de toutes ses parties et de la probabilité uniforme[3]. S est la fonction définie sur Ω qui a toute permutation associe le nombre de ses points fixes.

1.a - Si $n-1$ chaussures droites ont été bien placées, la dernière est automatiquement bien placée elle aussi. Par conséquent, $(S = n-1)$ est l'évènement impossible[4] dont l'effectif est 0. $(S = n)$ est l'évènement « toutes les chaussures droites sont bien placées »[5], dont l'effectif est 1.

1.b - $S = 1$. Plus précisément, le troisième adulte est le seul qui retrouve ses chaussures.

2.a - Cette question ne sert qu'à prendre connaissance de la commande `perms`. On constate que pour $n = 9$, *scilab* renvoie un message d'erreur : `taille de la pile dépassée`. Le calcul n'est donc possible que jusqu'à $n = 8$.

2.b - Complétons le script ci-dessus pour obtenir :

```
stacksize('max');
n=input('n= ');
P=perms(1:n);
r=size(P,'r');
```

Pour $n = 10$, on trouve que l'enfant a $10! = 3628800$ façons de ranger les chaussures droites, ce qui est bien connu : on sait bien qu'il y a $n!$ façons d'ordonner $(1, \ldots, n)$.

1. ou formule du crible
2. voir [1], Annexe A.6, p. 364
3. Ω a $n!$ éléments, chacun d'eux a la probabilité $1/n!$.
4. $(S = n-1) = \emptyset$
5. $(S = n) = \{L_0\}$

3 - Une *solution élémentaire* du problème posé revient à passer en revue toutes les permutations possibles, à compter combien chacune d'elles a de points fixes et à utiliser des compteurs qui donneront à la fin le nombre de permutations à 0 point fixe, à 1 point fixe, ..., à n points fixes. C'est ce que fait la fonction `pfixes`. On ne peut pas imaginer plus simple (c'est une solution sans mathématiques). La question **2** montre que cette solution ne sera calculable que si $n \leqslant 10$, ce qui est décevant.

4 - Comme on est dans le cas équiprobable, la loi de S se calcule à l'aide de la la formule

$$\frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles} \tag{2}$$

On a vu que les nombres de cas favorables sont donnés par la fonction `pfixes` (dans le cas $n = 10$). Ce calcul des effectifs des événements $(S = 0)$, ..., $(S = 10)$ est assez long (99,402 secondes). Il donne :

```
-->clear
-->stacksize('max');
-->exec('Chemin de la fonction pfixes', -1)
-->tic();S=pfixes(10);t=toc();afficher(S);afficher(t);
         column  1 to 7
    1334961.   1334960.   667485.   222480.   55650.   11088.   1890.
         column  8 to 11
    240.   45.   0.   1.
    99.402
```

En particulier, on retrouve les résultats de la question **1.a**.

La loi de S s'obtient en divisant par $10! = 3\ 628\ 800$ les effectifs calculés ci-dessus, ce qui donne :

```
     column  1 to 5
    0.3678795    0.3678792    0.1839410    0.0613095    0.0153356
         column  6 to 11
    0.0030556    0.0005208    0.0000661    0.0000124    0.    0.0000003
```

Il s'agit de résultats approchés dont le nombre de décimales a été fixé par la commande `format('v',10)`. On rappelle que *scilab* transforme automatiquement les fractions en nombres flottants. On aurait préféré évidemment obtenir [6] :

	$(S = 0)$	$(S = 1)$	$(S = 2)$	$(S = 3)$
Effectifs	1334961	1334960	667485	222480
Probabilités	$\frac{16481}{44800}$	$\frac{16687}{45360}$	$\frac{2119}{11520}$	$\frac{103}{1680}$

$(S = 4)$	$(S = 5)$	$(S = 6)$	$(S = 7)$	$(S = 8)$	$(S = 9)$	$(S = 10)$
55650	11088	1890	240	45	0	1
$\frac{53}{3456}$	$\frac{11}{3600}$	$\frac{1}{1920}$	$\frac{1}{15120}$	$\frac{1}{80640}$	0	$\frac{1}{3628800}$

car ce tableau donne les probabilités *exactes* des événements $(S = 0)$, ..., $(S = 10)$ exprimées sous la forme de fractions irréductibles. Nous reviendrons là-dessus.

Solution savante :

Calcul des nombres de dérangements $N_{n,0}$, ..., $N_{n,n}$

6. ce qui peut se faire avec *Xcas*

5.a - D'après la formule de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \mathrm{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\left(\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} (n-k)\,!\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)\,!\\
&= n\,!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k\,!}\\
\Longrightarrow \forall n\geqslant 1,\quad N_{n,0} &= n\,!-n\,!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k\,!} = n\,!\left(1-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k\,!}\right) = n\,!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k\,!} \qquad (3)
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que si l'on veut compter le nombre des permutations constituant $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$, un k-uple $(i_1,\,\ldots,\,i_k)$ tel que $1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n$ étant donné, *en fabriquant toutes ces permutations*, les éléments de rangs $i_1,\,\ldots,\,i_k$ sont imposés (il s'agit précisément de $i_1,\,\ldots,\,i_k$). Si $k<n$, il reste à choisir les places des $n-k$ éléments restants, ce qui fait $(n-k)\,!$ permutations.

5.b - Il est clair que

$$\frac{N_{n+1,0}}{(n+1)\,!}=\frac{N_{n,0}}{n\,!}+\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\,!}\Longrightarrow N_{n+1,0}=(n+1)\cdot N_{n,0}+(-1)^{n+1}$$

et que $N_{1,0}=0$, $(N_{1,0}=0)$ étant l'événement impossible.

5.c - On trouve la plus grande valeur de n qui permet un affichage exact de $N_{n,0}$ par tâtonnement, en utilisant par exemple le script suivant :

```
clear
n=input('n=');
N=0;
for i=1:(n-1)
    N=(i+1)*N+(-1)^(i+1);
end
format('v',25);
afficher(N);
```

Cela donne :

```
-->exec('Chemin du script', -1)
n= 20
    895014631192902144.
-->exec('Chemin du script', -1)
n= 30
    9.758107383683579009D+31
-->exec('Chemin du script', -1)
n= 25
    5.706255282633467520D+24
-->exec('Chemin du script', -1)
n= 22
    413496759611120812032.
```

```
-->exec('Chemin du script', -1)
n= 23
    9510425471055778807808.
-->exec('Chemin du script', -1)
n= 24
    2.2825021130533869140D+23
-->
```

On voit que la plus grande valeur de n qui permet un affichage exact de $N_{n,0}$ est 23. C'était fatal car si *scilab* peut afficher exactement 23 !, il passe en notations flottantes pour afficher 24 ![7]. On peut lire $N_{23} = 9\,510\,425\,471\,055\,778\,807\,808$. On ne peut pas aller plus loin de manière exacte pour des problèmes d'affichage.

5.d - On peut utiliser la fonction `Derangements` qui suit :

```
function N=Derangements(n)// n>=2.
    N=[0];
for i=1:(n-1)
    N=[N,(i+1)*N($)+(-1)^(i+1)];
end
endfunction
```

6 - Calcul des nombres de permutations à k points fixes

6.a - Pour construire toutes les permutations à k points fixes, $1 \leqslant k < n$, on choisit les k points fixes. Pour cela, il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles. On complète ensuite par un dérangement des $n-k$ points restants (on vient de calculer ces nombres), ce qui donne :

$$\forall n \geqslant 1 \text{ et } \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \qquad N_{n,k} = \binom{n}{k} N_{n-k,0} = \frac{n\,!}{k\,!} \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p\,!}$$

On se rappelle que $N_{n,n} = 1$.

6.b - En utilisant *scilab*, grâce aux questions **5** et **6.a**, on peut calculer de faqn approchée et très vite la loi de S bien au-delà de $n = 10$. Pour $n = 50$, les numérateurs des probabilités individuelles sont données par **6.a**, le dénominateur commun est

```
a=factorial(50)
 a  =
    3.041409320D+64
-->
```

La fonction `LoiS` suivante[8] :

```
function LS=LoiS(n)// n>=2.
    N=[0];//N_1=0. N deviendra le vecteur N=[N_1, N_2, ..., N_n].
for i=1:(n-1)
    N=[N,(i+1)*N($)+(-1)^(i+1)];
end
PF=[N(n)];//PF deviendra le vecteur des nombres de
//permutations a 0 point fixe, 1 point fixe, etc de (1,...,n).
```

7. N_{24} ne peut pas être affiché exactement car ce nombre entier a trop de chiffres.
8. Ce fichier : `LoiS.sci`, peut être téléchargé.

```
for i=1:n-2// Inutile de calculer PF(n-1)=0 et N(n,n)=1.
     PF=[PF,combinaison(n,i)*N(n-i)];
end
PF=[PF,0,1];
LS=PF/factorial(n);// Nombre de cas favorables sur
//nombre de cas possibles.
endfunction
```

donne la loi de S. À titre d'exemple, pour $n = 50$, on obtient :

```
-->clear
-->format('v',8);
-->exec('Chemin de la fonction LoiS', -1)
-->L=LoiS(50);
-->afficher(L);
         column 1 to 6
    0.36788     0.36788     0.18394     0.06131     0.01533     0.00307
         column 7 to 12
    0.00051     0.00007    9.1D-06     1.0D-06     1.0D-07     9.2D-09
         column  13 to 18
    7.7D-10     5.9D-11     4.2D-12     2.8D-13     1.8D-14     1.0D-15
         column 19 to 24
    5.7D-17     3.0D-18     1.5D-19     7.2D-21     3.3D-22     1.4D-23
         column 25 to 30
    5.9D-25     2.4D-26     9.1D-28     3.4D-29     1.2D-30     4.2D-32
        column 21 to 36
    1.4D-33     4.5D-35    1.4D-36     4.2D-38     1.2D-39     3.6D-41
         column 37 to 42
    9.9D-43     2.7D-44     7.0D-46     1.8D-47    4.5D-49     1.1D-50
         column 43 to 48
    2.6D-52     6.1D-54     1.4D-55     3.1D-57     6.8D-59     1.3D-60
         column 49 to 51
    4.0D-62     0.     3.3D-65
-->
```

Le calcul est pratiquement instantané.

7 - Calcul exact de la loi de S

Nous reprenons maintenant le problème à l'aide d'un logiciel de calcul formel, *Xcas* en l'occurence, sans détailler.

Voici une fonction *Xcas* qui associe à tout entier $n \geqslant 1$ la loi de S lorsque le nombre d'adultes est n[9]. L'algorithme est le même que précédemment. Il a été mis sous une forme exécutable par *Xcas*. La loi de S obtenue pour $n = 50$ est un résultat exact et non un résultat approché.

$\boxed{1}$

```
LoiS(n):={
local N,d,k,r,PF,c,LS;
N:=[0];
d:=0;
```

9. On peut choisir des valeurs de n beaucoup plus grandes : pour $n = 1000$, le calcul se fait en 0.6 seconde mais ne peut être affiché (message « string too long for display »). Il n'y a pas en principe de limitation des calculs, mais on voit qu'il y a des limitations d'affichage. Les fractions trouvées sont en principe données sous forme irréductile.

```
pour k de 1 jusque (n-1) faire
d:=(k+1)*d+(-1)^(k+1);
N:=append(N,d);
fpour;
PF:=[N[n-1]];
pour r de 1 jusque (n-1) faire
c:=comb(n,r)*N[n-r-1];
PF:=append(PF,c);
fpour
PF:=append(PF,1);
LS:=PF/(factorial(n));
retourne LS;
}:;
```

// Parsing LoiS
// Success compiling LoiS

$$\text{Done} \tag{4}$$

$\boxed{2}$ `LoiS(50)`

$$
\begin{aligned}
P(S=0) &= \frac{55692979645507618241066491143642281353963933344279350884620 89}{151389214543122837449540110333821646811237638471680000000000 00} \\
P(S=1) &= \frac{141271712257354551826139622105526948535496896576587393847479}{384016328304461843985007678864454152075475272335360000000000} \\
P(S=2) &= \frac{97166475126204780761009622846354618532447713494274612181679}{528251727341960539185629321164824469724318568284160000000000} \\
P(S=3) &= \frac{159100624684072766714306447665087342217985038121199371953}{2594882021851185758959508580136575049858170224640000000000} \\
P(S=4) &= \frac{15009836244609544847472414211488435740130209452396009}{979223162684833980620674973426805453090717696000000000} \\
P(S=5) &= \frac{8265694170488298540874657590861675946871675014688971}{2696218351588584400344774489008062698671308800000000000} \\
P(S=6) &= \frac{22742406079421034331584846001936724930824184898296683}{44510593810411235185846757765826126535584645120000000000} \\
P(S=7) &= \frac{176393120745870215775279288976060456714545445639747}{2416610522534953425494205282740559900290580480000000000} \\
P(S=8) &= \frac{1146059568606179919954890445572300188007669063611}{125609416114847267204566540762258772726906880000000000} \\
P(S=9) &= \frac{307662419905587585654556899376849633804439730767}{303481321434622058085318802948814499106258944000000000} \\
P(S=10) &= \frac{2565456909781843532662554924968518939374106573}{25305926323504028191396189530857994505420800000000000} \\
P(S=11) &= \frac{197472670029260324553630872514024155201822677}{21426794196282687027846642056719894031892480000000000}
\end{aligned}
$$

$$P(S=12) = \frac{4297727680000854700685539856435982141010 9}{5595905083821529575493014883973512298496000000000000}$$

$$P(S=13) = \frac{1562778331982117161709646031291739119989 1}{2645283234108973707141560747743196794060800000000000 0}$$

$$P(S=14) = \frac{3909962776542130968292859568637246910243}{92656407335276484444742235920950893110886400000000000}$$

$$P(S=15) = \frac{1118044911592929606946487621750846747 21}{39742331577630845043700713936682368368640000000000000}$$

$$P(S=16) = \frac{76718285742862403528149787867745 97}{436327881779456497114465098165576007680000000000}$$

$$P(S=17) = \frac{99825438535083000620222109084897031}{96517090974246337963273162417657180323840000000000}$$

$$P(S=18) = \frac{31225943627787448874360777035353 91}{54343933920983275334159669161848031150080000000000}$$

$$P(S=19) = \frac{27777899806629101099207532371 9}{918519773859594501027893857217874493440000000000}$$

$$P(S=20) = \frac{33648646150633026804268078701 89}{22252903976264703261832623148170529996800000000000}$$

$$P(S=21) = \frac{11616794504385211634806836694 7}{16133355382791909864828651782423634247680000000000}$$

$$P(S=22) = \frac{46157264952857375588845101 1}{1410266342528709589433013977291465687040000000000}$$

$$P(S=23) = \frac{14006262966463963871240459}{984263060488631105811827562322927288320000000000}$$

$$P(S=24) = \frac{59345054939388054328515 13}{10008861699546613200433162055977145047449600000000}$$

$$P(S=25) = \frac{7925354559213148281051 7}{3341633847337945112324105921466728448000000000000}$$

$$P(S=26) = \frac{99239222306668987171 43}{10879197499507188261340393539105592442880000000000}$$

$$P(S=27) = \frac{39299278806015611311}{1163219980577473125050341664563459522560000000000}$$

$$P(S=28) = \frac{6563440628747948887}{5439598749753594130670196769552796221440000000000}$$

$$P(S=29) = \frac{722896432886574 79}{1737438271992974908520008653491775995904000000000}$$

$$P(S=30) = \frac{4282366656425369}{3087723518237686098531799384195910860800000000000}$$

$$P(S=31) = \frac{92079694567171}{2058164678463165456006947346728940994560000000000}$$

$$P(S=32) = \frac{138547156531409}{990977618559106785505264555304287626854400000000000}$$

$$P(S=33) = \frac{8178130767479}{1930341819484926759265463248353143606476800000000000}$$

$$P(S=34) = \frac{15549624751}{124789774188924558174737018075354738196480000000000}$$

$$P(S=35) = \frac{34361893981}{9651709097424633796327316241765718032384000000000000}$$

$$P(S=36) = \frac{2467007773}{24945955821035976581276755824871394299084800000000000}$$

$$P(S=37) = \frac{63633137}{23807549106980763364274046729688771146547200000000000}$$

$$P(S=38) = \frac{1456321}{20704848810139659429324155070701995504435200000000000}$$

$$P(S=39) = \frac{1468457}{814218179458742107058172398155355973211914240000000000}$$

$$P(S=40) = \frac{16481}{365530046895058184986833848779059920633856000000000000}$$

$$P(S=41) = \frac{1}{909334576120998556017614918645695748505600000000000}$$

$$P(S=42) = \frac{163}{6225257875581990935083462624591066648333516800000000000}$$

$$P(S=43) = \frac{103}{16916273657744673978459436979183919302034063360000000000}$$

$$P(S=44) = \frac{53}{382791106769536622598282116786104688206027948032000000000}$$

$$P(S=45) = \frac{1}{326242420542218712441717713169975586539228364800000000000}$$

$$P(S=46) = \frac{1}{14673659092832237199600814476800679714564404674560000000000}$$

$$P(S=47) = \frac{1}{775869724533504541928893065460835939907592897167360000000000}$$

$$P(S=48) = \frac{1}{248278311850721453417245780947467500770429727093555200000000000}$$

$$P(S=49) = 0$$

$$P(S=50) = \frac{1}{30414093201713378043612608166064768844377641568960512000000000000}$$

Annexe : Démonstration de la formule de Poincaré

1.a - Voici une démonstration élémentaire de (1) rédigée à la manière de l'algorithmique :

Preuve : pour le moment, les cardinaux qui apparaissent dans la formule ci-dessus sont considérés comme de simples compteurs initialisés à 0.

Nous allons faire l'inventaire de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Chaque fois qu'un élément e de cet ensemble a été examiné, le compteur $\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$ augmente de 1 ainsi qu'au moins un compteur du deuxième membre. Pour évaluer précisément comment se modifie ce deuxième membre, notons $i_1, \ldots, i_p$ les indices des ensembles $A_1, \ldots, A_n$ qui contiennent e, rangés dans l'ordre croissant. Les compteurs du deuxième membre qui augmentent de 1 sont :

- $\mathrm{Card}\,(A_{i_1}), \ldots, \mathrm{Card}\left(A_{i_p}\right)$, soit $\binom{p}{1}$ compteurs,
- $\mathrm{Card}\,(A_{i_1} \cap A_{i_2}), \ldots, \mathrm{Card}\left(A_{i_{p-1}} \cap A_{i_p}\right)$, soit $\binom{p}{2}$ compteurs,

$\ldots \quad \ldots$

- $\mathrm{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{p} A_{i_j}\right)$, soit $\binom{p}{p}$ compteurs,

Les autres compteurs du deuxième membre sont inchangés. Il augmente donc de

$$\sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} \binom{p}{k} = 1 \quad \text{car} \quad 0 = (1-1)^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} \tag{5}$$

Finalement, comme l'égalité (1) était satisfaite au début du processus ($0 = 0$), elle est encore satisfaite à la fin. De plus, tous les compteurs contiennent clairement le nombre d'éléments de l'ensemble qui lui correspond. CQFD.

1.b - Une preuve particulièrement élégante, voir [1], s'obtient en intégrant la relation

$$\prod_{i=1}^{n} (1 - 1_{A_i}) = 1_{\bigcap_{i=1}^{n} A_i^c} = 1_{\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c} = 1 - 1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$$

valable pour tous ensembles $A_1, \ldots, An$, ou

$$1_{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} 1_{\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}} \right) \tag{6}$$

Si $A_1, \ldots, An$ sont des parties $\mathcal{A}$-mesurables d'un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, m)$ et si $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) < +\infty$, en intégrant (6) par rapport à la mesure m, on obtient :

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} m\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) \right) \tag{7}$$

qui généralise (1).

1.c - La preuve la plus simple se fait par récurrence.

Références

[1] Olivier Garet et Aline Kurtzmann *De l'intégration aux probabilités*, Ellipses, 2011.

[2] Wikipedia *Principe d'inclusion-exclusion*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Principe_d%27inclusion-exclusion

[3] Wikipedia *Dénombrement des dérangements*
http://fr.wikiversity.org/wiki/Formule_du_crible/