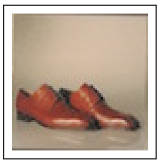

Un tas de chaussures

Énoncé

CAPES

Proba/Stat

Mots-clefs *Calcul des probabilités* : variables aléatoires discrètes finies, modèle équiprobable, dénombrements, formule de Poincaré ; *Algorithmique* : calculs approchés, calculs exacts en nombres rationnels, *scilab*, *Xcas*.

Énoncé : n adultes entrent dans une pièce, enlèvent leurs chaussures et les empilent en un tas. Plus tard, un enfant apparie au hasard chaque chaussure gauche avec une chaussure droite. On appelle S le nombre de vraies paires ainsi reconstituées. C'est une variable aléatoire dont on demande la loi.

Modélisation du problème

On peut imaginer que les chaussures gauches ont été numérotées de 1 à n ainsi que les chaussures droites, les chaussures de même rang formant une paire. Les paires sont numérotées comme les chaussures gauches. Les chaussures droites sont représentées à l'origine par la liste $L_0 = (1, \ldots, n)$.

Après le rangement de l'enfant, elles sont représentées par une permutation L de L_0. La paire de chaussures de rang i est reconstituée si et seulement si $L(i) = i$, autrement dit si i est un point fixe de la permutation L. La variable aléatoire S est donc le nombre de points fixes de la permutation aléatoire L.

Le problème s'énonce maintenant comme suit :

> L étant une permutation aléatoire de $L_0 = (1, \ldots, n)$, S désignant le nombre de ses points fixes, déterminer la loi de la variable aléatoire S.

Solution élémentaire

1.a - Quels sont les effectifs des évènements $(S = n-1)$? $(S = n)$?

1.b - On suppose dans cette question seulement que $n = 10$.

Combien vaut S si $L = (2, 4, 3, 6, 9, 10, 8, 7, 1, 5)$?

2.a - Prendre connaissance de la commande `perms` de *scilab* et essayer d'exécuter le script suivant :

```
n=input('n=');
P=perms(1:n);
r=size(P,'r');// Nombre de permutations de (1,...,n).
afficher('Le nombre de permutations de 1...n est '+string(r));
```

pour $n = 8, 9, 10, 11$. Quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle le calcul est possible ?

2.b - Augmenter le plus possible la taille de la mémoire accordée au calcul (prendre connaissance de la commande `stacksize`). Quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle le calcul est maintenant possible ? Combien y a-t-il de permutations de $(1, \ldots, 10)$?

3 - Que retourne la fonction-*scilab* `pfixes` (à télécharger) ci-dessous ?

```
function S=pfixes(n)
    S=zeros(1,n+1);
    L=1:n;
    A=perms(L);
    r=size(A,'r');
    for i=1:r
        j=taille(find(A(i,:)==L));
```

```
        S(j+1)=S(j+1)+1;
    end
endfunction
```

4 - Calculer la loi de la variable aléatoire S dans le cas où $n = 10$.

Solution savante : *Ci-dessous, nous allons calculer exactement la loi de S sans limitation sur n.*

On note $N_{n,k}$ le nombre de permutations de $L_0 = (1, \ldots, n)$ ayant exactement k points fixes [1]. Une permutation de L_0 n'ayant pas de point fixe s'appelant un *dérangement*, $N_{n,0}$ est plus particulièrement le nombre de dérangements de L_0.

5 - Calcul des nombres de dérangements $N_{n,0}, \ldots, N_{n,n}$

Appelons Ω l'ensemble de toutes les permutations de L_0 (on sait qu'il y en a $n\,!$) et notons A_i l'ensemble des permutations qui laissent i invariant ($i = 1, \ldots, n$), soit

$$A_i = \{L,\ L \in \Omega,\ L(i) = i\}$$

Il est clair que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est l'ensemble des permutations ayant au moins un point fixe et que son complémentaire est l'ensemble des dérangements.

5.a - À l'aide de la formule de Poincaré [2], démontrer que [3]

$$\forall n \geqslant 1, \quad N_{n,0} = n\,!\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k\,!}$$

5.b - Démontrer que la suite $N_{1,0}, N_{2,0}, \ldots, N_{n,0}, \ldots$ vérifie :

$$N_{1,0} = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1, \quad N_{n+1,0} = (n+1)N_{n,0} + (-1)^{n+1}$$

5.c - Revoir la commande `format`. Donner un script *scilab* qui permet de calculer $N_{n,0}$ pour toute valeur spécifiée de n. Quelle est la plus grande valeur de n qui permet à *scilab* d'afficher $N_{n,0}$ exactement [4]. Combien $N_{n,0}$ vaut-il alors ?

5.d - Programmer une fonction *scilab* dont l'entrée est n et qui retourne la liste $(N_{1,0}, \ldots, N_{n,0})$.

6 - Calcul des nombres de permutations à k points fixes

6.a - Démontrer que

$$\forall n \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, \quad N_{n,k} = \binom{n}{k} N_{n-k,0} = \frac{n\,!}{k\,!}\sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p\,!}$$

6.b - La loi de S est $\left(\dfrac{N_{n,0}}{n\,!}, \ldots, \dfrac{N_{n,n}}{n\,!}\right)$. Calculer cette loi avec *scilab* lorsque $n = 50$.

7 - Calcul exact de la loi de S

Modifier la fonction *scilab* utilisée à la question **6.b** de manière à ce qu'elle soit exécutable par *Xcas*. Calculer exactement cette loi lorsque $n = 50$.

1. $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$.
2. Pour tous ensembles finis $A_1, \ldots, A_n$, $\operatorname{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \operatorname{Card}\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)$.
3. Les formules qui suivent se comprennent avec les notations et conventions habituelles : $0\,! = 1$ et $(-1)^0 = 1$.
4. c'est à dire sans passer en notations flottantes