Calcul approché d'intégrales par la méthode du point médian

Fiche Professeur

TS

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

Objet de l'activité : Calculer une valeur approchée de l'aire d'une portion de plan limitée par le graphe d'une fonction continue, deux fois dérivable, ces dérivées étant continues, l'axe des abscisses et deux parallèles à l'axe des ordonnées à l'aide de la méthode des points médians et apprécier la qualité de l'approximation.

Commentaires : Selon le libellé du programme (B.O. spécial du 13 octobre 2011), « on s'appuie sur la notion intuitive d'aire rencontrée au collège et sur les propriétés d'additivié et *etc* ».

Niveau de difficulté : Un peu difficile. Tout est bien détaillé sauf la dernière question qui est une application numérique qui peut être donnée séparément comme exercice.

Compétences engagées :

- Dérivée de la somme et du produit de deux fonctions dérivables.
- Encadrements par double inégalité.
- Limite d'une suite convergente.
- L'intégration conserve les inégalités entre fonctions.
- Primitives de fonctions continues, de fonctions-puissances.

Matériel utilisé : Calculatrice programmable ou ordinateur équipé d'un logiciel de calcul.

Durée indicative : Une heure, sans la dernière question.

Fichiers téléchargeables :

Pour les élèves :

- Fiche Élève (pdf).

Pour les professeurs :

- Fiche Professeur (pdf).

Solution :

I - Préliminaires

1.a - Il suffit de dériver Φ et de constater que

$$\forall t \in [m, x]\,, \quad \Phi'(t) = \varphi(t)$$

Ce calcul est justifié par le théorème sur la dérivation du produit et de la somme de deux fonctions dérivables.

1.b - Φ étant une primitive de φ sur $[m, x]$,

$$\forall x \in \,]m, b]\,, \quad \Phi(x) - \Phi(m) = \int_m^x \varphi(t)\,dt$$

En exprimant les fonctions Φ et φ à l'aide des égalités (1) de l'énoncé, on obtient l'égalité (2), si $m < x$. Bien sûr, cela est vrai aussi si $x = m$ moyennant la convention $\int_m^m (x-t)\cdot f''(t)\,dt = 0$.

1.c - $\forall t \in [m,x]\,,\ -M\cdot (x-t) \leqslant (x-t)\cdot f''(t) \leqslant M\cdot (x-t)$, car $x-t \geqslant 0$. Comme l'intégration conserve les inégalités des fonctions, en intégrant sur l'intervalle $[m,x]$, on obtient :

$$-\frac{M}{2}\cdot (x-m)^2 = -\int_m^x M\cdot (x-t)\,dt \leqslant \int_m^x (x-t)\cdot f''(t)\,dt \leqslant \int_m^x M\cdot (x-t)\,dt = \frac{M}{2}\cdot (x-m)^2$$

ce qui est l'égalité (4) de l'énoncé.

1.d - Comme $\displaystyle\int_m^b \frac{M}{2}\cdot (x-m)^2\,dx = \frac{M}{48}(b-a)^3$, on voit qu'il suffit d'intégrer la double inégalité (4) sur l'intervalle $[m,b]$ pour obtenir (5). Ces deux intégrations successives reviennent à calculer des intégrales doubles mais, on le voit, il est inutile de savoir cela.

2 - (6) se démontre comme (5) comme suit : pour tout point x de $]a,m]$, les fonctions Φ et φ (de la variable t) étant définies par les égalités (1) sur l'intervalle $[x,m]$,

$$\begin{aligned}
\forall x \in [a,m]\,,\quad \Phi(m)-\Phi(x) &= f(m)+(x-m)\cdot f'(m)-f(x)\\
&= \int_x^m (x-t)\cdot f''(t)\,dt\\
\text{ou bien}\quad f(x) &= f(m)+(x-m)\cdot f'(m)-\int_x^m (x-t)\cdot f''(t)\,dt\\
\int_x^m (x-t)\cdot f''(t)\,dt &\leqslant \int_x^m M\cdot (t-x)\,dt\\
&= M\cdot \frac{(m-x)^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ -\frac{M}{2}\cdot \int_a^m (x-m)^2\,dx \leqslant \int_a^m f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\cdot f(m) + \frac{(b-a)^2}{8}\cdot f'(m) \leqslant \frac{M}{2}\cdot \int_a^m (x-m)^2\,dx$$

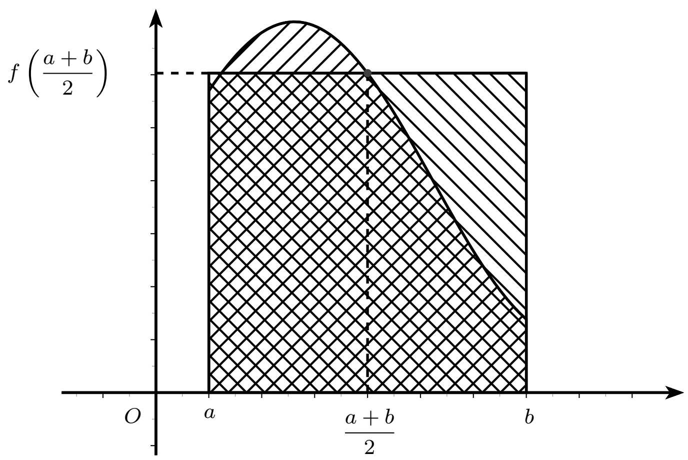
ou

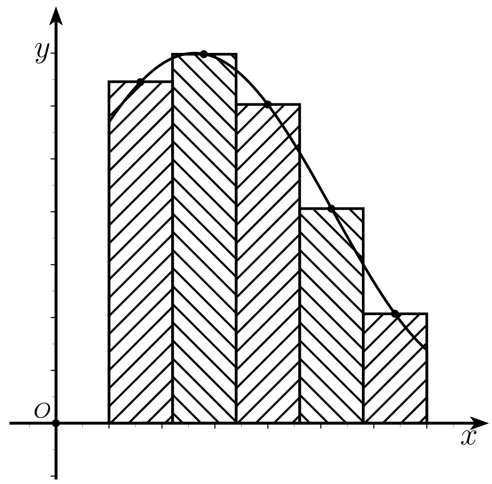
$$-\frac{M}{48}\cdot (b-a)^3 \leqslant \int_a^m f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\cdot f(m) + \frac{(b-a)^2}{8}\cdot f'(m) \leqslant \frac{M}{48}\cdot (b-a)^3$$

Dans ce calcul, on a utilisé :

$$\int_a^m (x-m)\,dx = -\frac{(a-m)^2}{2} = -\frac{(b-a)^2}{8} \quad \text{et} \quad \int_a^m (x-m)^2\,dx = -\frac{(a-m)^3}{3} = \frac{(b-a)^3}{24}$$

En additionnant membre à membre les doubles inégalités (5) et (6), on obtient l'encadrement (7) sur lequel est basée la méthode du point médian.





II - Calcul approché d'intégrales par la méthode du point médian

Cette méthode est illustrée par la figure de droite.

3 - Cette question est une application directe de (7). Pour le majorant, par exemple, chacun des n termes de la somme à majorer est $\leqslant \frac{M}{24} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^3}$, si bien que c'est un terme en $\frac{1}{n^2}$ qui apparaît.

4 - La définition de la limite imposée par le programme s'applique ici. L'interprétation de l'intégrale comme une aire apparaît maintenant naturelle. Ceci dit, mesurer les aires est un problème très difficile qui ne peut être envisagé que dans le cadre d'une théorie mathématique. L'évidence du résultat n'est pas une preuve.

5 - Dans l'intervalle $[1,2]$, $f(t) = \frac{1}{t}$, $f'(t) = \frac{-1}{t^2}$, $f''(t) = \frac{2}{t^3}$, $M = 2$. De plus,

$$\frac{M}{24} \cdot \frac{(b-a)^3}{n^2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{n^2} \leqslant 10^{-3} \iff n \geqslant \sqrt{\frac{10^3}{12}} \approx 9.1287092917528$$

On choisit $n = 10$ pour économiser les calculs. On en déduit que

$$S_{10} = \frac{b-a}{10} \sum_{i=0}^{9} f(m_i) = \sum_{i=0}^{9} \frac{2}{21+2i} \approx 0.6928353604100$$

est une valeur approchée de $ln(2)$ à 10^{-3} près.

Commentaires : Ce résultat est justifié par l'encadrement (7) qui n'est pas du tout optimal. De plus (7) s'applique à beaucoup de fonctions. Habituellement, quand on applique une théorie très générale à un cas particulier, on obtient un résultat peu satisfaisant. C'est le cas ici. On peut le constater comme suit : comme les logiciels de calcul ou les calculatrices programmables fournissent une valeur approché de $ln(2)$ assez précise, on peut chercher à partir de quelle valeur de n, S_n approche $ln(2)$ à 10^{-3} près, par exemple à l'aide du script *scilab* suivant :

```
n=input('n=');
A=2*n+2*[0:n-1]+1;
B=2 ./A;
Sn=sum(B);
if (ln(2)-10^(-3)<=Sn)&(Sn<=ln(2)+10^(-3)) then
    afficher('n='+string(n)+' suffit ; '+string(Sn)+' est une valeur
    approchee a 10^(-3) pres.');
else
    afficher('n='+string(n)+' n''est pas assez grand.');
end
```

On trouve que $n = 6$ convient déjà.