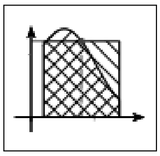


Calcul approché d'intégrales par la méthode du point médian

Fiche Élève

TS

Une fonction f définie, continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ est donnée. On suppose que la fonction dérivée f' est continue et dérivable sur $[a, b]$ et que sa dérivée notée f'' et appelée fonction dérivée seconde de f est également continue sur $[a, b]$.

I - Préliminaires

Dans ce qui suit, m désigne le point médian (milieu) de l'intervalle $[a, b]$, soit $m = \dfrac{a+b}{2}\cdot$

1.a - Soit x un réel fixé tel que $m < x \leqslant b$. Considèrons les fonctions φ et Φ (de la variable t) définies sur l'intervalle $[m, x]$ par :

$$\forall t \in [m, x]\,, \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \varphi(t) & = & (x-t)\cdot f''(t) \\ \\ \Phi(t) & = & f(t) + (x-t)\cdot f'(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

Démontrer que Φ est une primitive de φ sur $[m, b]$.

1.b - En déduire que

$$\forall x \in [m, b]\,, \quad f(x) = f(m) + (x-m)\cdot f'(m) + \int_m^x (x-t)\cdot f''(t)\,dt \tag{2}$$

1.c - On admettra que, comme la fonction f'' est continue sur l'intervalle $[a, b]$, il existe une constante M telle que

$$\forall x \in [a, b]\,, \quad -M \leqslant f''(x) \leqslant M \tag{3}$$

ce qui prouve que

$$\forall x \in [m, b] \quad \text{et} \quad \forall t \in [m, x]\,, \quad -M\cdot(x-t) \leqslant (x-t)\cdot f''(t) \leqslant M\cdot(x-t)$$

puisque $x - t \geqslant 0$.

Démontrer que

$$\forall x \in [m, b]\,, \quad -\frac{M}{2}\cdot(x-m)^2 \leqslant \int_m^x (x-t)\cdot f''(t)\,dt \leqslant \frac{M}{2}\cdot(x-m)^2$$

ce qui prouve que

$$\forall x \in [m, b]\,, \quad -\frac{M}{2}\cdot(x-m)^2 \leqslant f(x) - f(m) - (x-m)\cdot f'(m) \leqslant \frac{M}{2}\cdot(x-m)^2 \tag{4}$$

1.d - En déduire que

$$-\frac{M}{48}\cdot(b-a)^3 \leqslant \int_m^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\cdot f(m) - \frac{(b-a)^2}{8}\cdot f'(m) \leqslant \frac{M}{48}\cdot(b-a)^3 \tag{5}$$

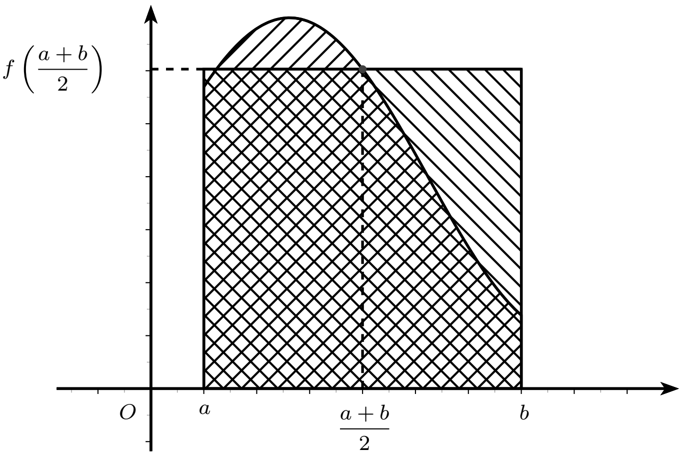
2 - On démontrerait de même que :

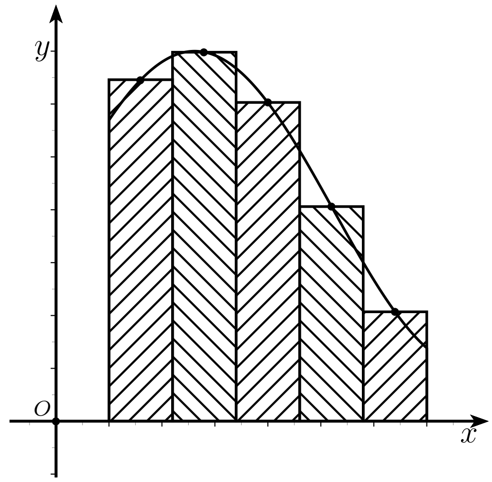
$$-\frac{M}{48}\cdot(b-a)^3 \leqslant \int_a^m f(x)\,dx - \frac{b-a}{2}\cdot f(m) + \frac{(b-a)^2}{8}\cdot f'(m) \leqslant \frac{M}{48}\cdot(b-a)^3 \tag{6}$$

En déduire que

$$\boxed{-\frac{M}{24}\cdot(b-a)^3 \leqslant \int_a^b f(x)\,dx - (b-a)\cdot f(m) \leqslant \frac{M}{24}\cdot(b-a)^3} \tag{7}$$

Commentaires : Si on considère $(b-a)\cdot f(m)$ comme une valeur approchée de $\int_a^b f(x)\,dx$, l'erreur d'approximation est majorée par $\dfrac{M}{24}\cdot(b-a)^3$. La figure de gauche illustre ce que nous venons de faire.





II - Calcul approché d'intégrales par la méthode du point médian

Étant donné un entier $n \geqslant 2$ (la figure de droite a été faite avec $n=5$), partageons l'intervalle d'intégration $[a,b]$ en n sous-intervalles égaux à l'aide des points

$$a_0 = a, \quad a_1 = a + \frac{b-a}{n}, \quad \dots, \quad a_{n-1} = a + (n-1)\frac{b-a}{n}, \quad a_n = b \tag{8}$$

On utilisera aussi les points médians $m_i = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$, $i = 0, \dots, n-1$, de ces sous-intervalles.

Posons $S_n = \dfrac{b-a}{n}\cdot \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(m_i)$. On en déduit que

$$\int_a^b f(x)\,dx - S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f(m_i) = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\cdot f(m_i)\right)$$

Compte tenu de (7), on peut penser que S_n est une bonne approximation de $\int_a^b f(x)\,dx$.
Le problème est bien sûr d'apprécier la précision de cette approximation.

3 - Démontrer que

$$-\frac{M}{24}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2} \leqslant \int_a^b f(x)\,dx - S_n \leqslant \frac{M}{24}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2} \tag{9}$$

4 - En déduire que

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)\,dx \tag{10}$$

Cela suggère que lorsque f est de plus positive sur $[a,b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la portion de plan comprise entre le graphe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.

5 - Application : calculer une valeur approchée de $\ln(2) = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t}\,dt$ à 10^{-3} près à l'aide de la méthode des points médians.