



Numéroter les jours

Fiche Élève

TS
&
SpéMath

On cherche une formule qui permettrait de numéroter les jours écrits dans l'ordre chronologique à partir du 1^{er} mars 1700.

Première partie : Questions auxiliaires

1 - $[x]$ désignant la partie entière de tout réel x , démontrer que pour tout entier n ,

$$[x + n] = n + [x] \quad (1)$$

2 - Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\text{bis}(n)$ le nombre des entiers de 1 à n qui sont multiples de 4 sans être multiples de 100 ou qui sont multiples de 400.

2.a - Démontrer que

$$\text{bis}(n) = \left[\frac{n}{4} \right] - \left[\frac{n}{100} \right] + \left[\frac{n}{400} \right] \quad (2)$$

2.b - n étant une année du calendrier actuel, combien peut valoir $\text{bis}(n) - \text{bis}(n-1)$? pour quelles valeurs de n ?

Deuxième partie : Numérotation des jours depuis le 1^{er} mars 1700

À toute date $d = (j, m, a)$ où j peut varier de 1 à 28, 29, 30 ou 31, où m varie de 1 à 12 et où $a \geq 1700$, on associe le nombre $N(j, m, a)$ ainsi défini, sachant que $[x]$ désigne la partie entière de x :

• si $m \leq 2$,

$$N(j, m, a) = 365(a-1) + \text{bis}(a-1) + 30m + [0.6m + 0.8] + j - 620637 \quad (3)$$

• si $m \geq 3$,

$$N(j, m, a) = 365a + \text{bis}(a) + 30 \cdot m + [0.6m + 0.6] + j - 621004 \quad (4)$$

3 - Calculer $N(1, 3, 1700)$.

Nous allons maintenant vérifier que la fonction N fournit un procédé de numérotation des jours à compter du 1^{er} mars 1700. Compte tenu de la question 3, il s'agit de vérifier que si (j, m, a) et (j', m', a') sont deux jours consécutifs,

$$N(j', m', a') - N(j, m, a) = 1 \quad (5)$$

C'est évident s'il s'agit de 2 jours d'un même mois. Par exemple, $N(1, 31, 1700) = 31$ d'après 3. Passons aux 12 changements de mois.

4 - Calculer $N(1, 2, a) - N(31, 1, a)$ (passage de janvier à février pendant l'année $a \geq 1700$).

5 - Calculer $N(1, m+1, a) - N(31, m, a)$ lorsque $m = 3, 5, 7, 8, 10$ (passage d'un mois de 31 jours, sauf janvier, au mois suivant).

6 - Calculer $N(1, m+1, a) - N(30, m, a)$ lorsque $m = 4, 6, 9, 11$ (passage d'un mois de 30 jours au mois suivant).

7 - Calculer $N(1, 3, a) - N(28, 2, a)$ (passage de février à mars une année non-bissextile).

8 - Calculer $N(1, 3, a) - N(29, 2, a)$ (passage de février à mars une année bissextile).

9 - Calculer $N(1, 1, a + 1) - N(31, 12, a)$ (changement d'année).

10 - Conclure.

11.a - Traduire la fonction $(j, m, a) \rightarrow N(j, m, a)$ par un algorithme exécutable par un logiciel de calcul ou une calculatrice programmable.

11.b - Calculer $N(1, 1, 3000)$, $N(1, 1, 3001)$.

