Périmètre et aire des flocons de Koch

1S

Fiche Professeur

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

Objet de l'activité : Calculer le périmètre et l'aire des flocons de Koch successifs construits à partir d'un hexagone régulier. Vérifier que la suite des périmètres tend vers $+\infty$ alors que la suite des aires converge vers un nombre bien identifié.

Commentaires : Activité centrée sur les suites géométriques appliquées à un joli problème. C'est strictement un travail sur les suites. Les flocons de Koch ne sont pas construits.

Niveau de difficulté : Correct.

Compétences engagées : Suites géométriques, formule $1 + r + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}\cdot$

Matériel utilisé : Calculette.

Durée indicative : En classe. Une heure.

Fichiers téléchargeables : Fiche « Élève » et fiche « Professeur »(fichiers pdf).

On peut montrer aux élèves les premiers flocons de Koch.

- *Python* (fichier « PremiersFlocons.py », téléchargeable) calcule quasi-instantanément $K_1, \ldots, K_7$ puis calcule assez vite K_8. Le calcul de K_9, trop long, est à éviter. Cliquer sur le bouton « tracer un flocon » pour l'activer ; chaque clic supplémentaire donne un nouveau flocon à partir de K_1. K_0 n'apparaît pas.

- Le fichier *scilab* téléchargeable « PremiersFlocons.sce » fournit $K_0, \ldots, K_6$ (si $n = 6$) et un zoom d'une partie de K_6 qui montre que localement, on a toujours la même structure. L'exécution de ce fichier pour $n = 7$ dure près d'une minute. Il vaut mieux éviter le cas $n = 8$, trop long.

Solution :

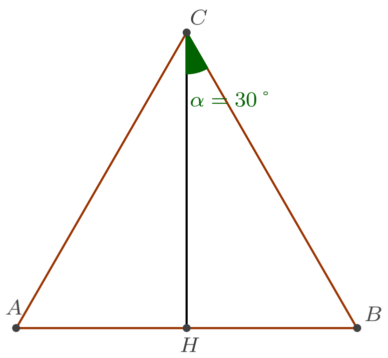
Les résultats ci-dessous sont exprimés en centimètres quand il s'agit de longueur et en centimètres carrés quand il s'agit d'aire.

1.a - Chaque côté de K_n produit 4 côtés de K_{n+1}. Le nombre de côtés de K_{n+1} est donc le nombre de côtés de K_n multilplié par 4. Comme K_0 a 6 côtés, K_n a $c_n = 6\cdot 4^n$ côtés (faire une récurrence). K_5 a 6144 côtés (calcul à la main).

1.b - On démontre par récurrence que $l_n = \left(\dfrac{1}{3^n}\right)$.

2 - $p_n = l_n\cdot c_n = 6\cdot 4^n\cdot \left(\dfrac{1}{3^n}\right) = 6\cdot \left(\dfrac{4}{3}\right)^n$.

3.a - Considérons le triangle équilatéral ABC de côté r ci-contre. La longueur de sa hauteur CH est $r\cdot \cos\dfrac{\pi}{6} = r\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, par définition du cosinus. L'aire de ABC est donc $r^2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot$



3.b - L'aire de l'hexagone K_0 formé de 6 triangles équilatéraux de côté 1 est donc $a_0 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\cdot$

3.c - L'affirmation « L'aire de K_{n+1} est l'aire de K_n augmentée des aires des triangles qui ont été ajoutés » a besoin d'être démontrée, ce que nous ne faisons pas ici, voir [3]. Pour tout entier $n \geqslant 0$, nous avons donc :

$$a_{n+1} = a_n + c_n \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{l_n}{3}\right)^2 = a_n + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$$

En calculant la somme des aires des n premiers flocons de deux manières différentes, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

ce qui donne après simplification :

$$a_n = a_0 + \frac{\sqrt{3}}{6}\left(1 + \frac{4}{9} + \ldots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{10}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{1}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)\right)$$

en utilisant la formule $1 + r + \cdots + r^n = \dfrac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$.

4 - $p_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ car au coefficient 6 près, (p_n) est une progression géométrique de raison > 1.

5 - $\left(\frac{4}{9}\right)^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ (suite géométrique), donc $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{9\sqrt{3}}{5} \approx 5.1961524227066$.

6 - Cette question se traite simplement à l'aide des valeurs d'une calculatrice. La solution suivante est hors programme (à cause du logarithme) : $p_n \geqslant 10^6 \iff n \geqslant \dfrac{6\log 10 - \log 6}{\log 4 - \log 3}$. Comme on cherche le premier flocon dont le périmètre est supérieur ou égal à 10 km, la solution est $n = \left[\dfrac{6\log 10 - \log 6}{\log 4 - \log 3}\right]$, le crochet signifiant ici « partie entière », ce qui donne avec « scilab » :

```
-->n=floor((6*log(10)-log(6))/(log(4)-log(3)))
 n  =

    41.
```

nous donne $n = 41$. Il reste à calculer a_{41}, ce qui n'est pas passionnant :

```
-->a=3*sqrt(3)/2*(1+1/5*(1-(4/9)^41))
 a  =

    3.117691453624
```

Références

[1] *Flocon de Koch*, encyclopédie en ligne WIKIPÉDIA
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Flocon_de_Koch#Flocon_de_Koch`
Cet article parle de la *Courbe de Koch*, du *Flocon de Koch* et de diverses variantes. Le flocon de Koch est l'un des premiers exemples de fractales.

[2] *Helge von Koch*, encyclopédie en ligne WIKIPÉDIA
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Helge_von_Koch`
Niels Fabian Helge von Koch était un mathématicien suédois (1870-1924).

[3] *Compléments sur les flocons de Koch*, Raymond Moché
http://gradus-ad-mathematicam.fr/Remarquables4.htm
À paraître : cet article justifie l'affirmation « L'aire de K_{n+1} est l'aire de K_n augmentée des aires des triangles qui ont été ajoutés » et identifie la limite de la suite des flocons de Koch (limite au sens de la théorie des ensembles).