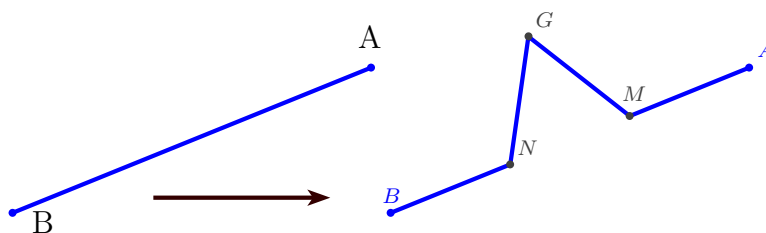


Périmètre et aire des flocons de Koch

1S

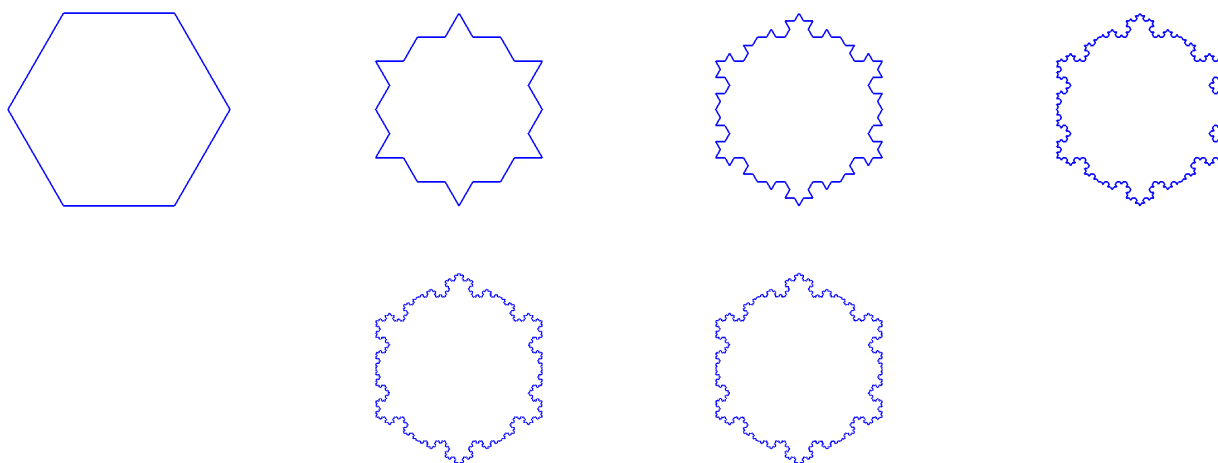
Fiche Élève

Pour construire par récurrence la suite (K_n) des flocons de Koch, on part d'un hexagone régulier K_0 . On construit le premier flocon K_1 à partir de K_0 exactement de la même manière que l'on construit le $(n + 1)^{\text{ème}}$ flocon K_{n+1} à partir du $n^{\text{ème}}$ flocon K_n . Plus précisément, on remplace chaque côté AB du polygone K_n , $n \geq 0$, par une ligne brisée $AMGNB$, le point M étant situé au tiers de AB à partir de A , le point N aux deux tiers de AB , toujours à partir de A , le point G étant le troisième sommet du triangle équilatéral MNG positionné à l'extérieur du polygone K_n . On peut représenter cette transformation $AB \rightarrow AMGNB$ par le schéma suivant :



(on a supposé que, quand on se déplace de A vers B sur K_n , ce polygone se trouve sur la gauche).

Ci-dessous, on a représenté l'hexagone régulier K_0 , puis les flocons K_1, \dots, K_5 issus de cet hexagone. Il n'est pas nécessaire de savoir comment ils ont été fabriqués.



On peut avoir l'impression de K_5 est identique à K_4 , mais c'est faux. Tout flocon de Koch est modifié sur un tiers de sa longueur pour obtenir le flocon suivant. Tous les flocons de Koch sont différents.

Ci-dessous, on supposera que K_0 est l'hexagone inscrit dans le cercle-unité, qui admet pour sommet le point de coordonnées $(1, 0)$, le plan étant rapporté à un repère orthonormé. On conviendra que l'unité de longueur est le centimètre. n est un entier ≥ 1 .

1.a - Calculer le nombre c_n de côtés du polygone K_n . Quel est le nombre de côtés de K_5 ?

1.b - Calculer la longueur l_n des côtés du polygone K_n .

2 - Quel est le périmètre p_n de K_n ?

3.a - Quelle est l'aire d'un triangle équilatéral dont le côté mesure r cm ?

3.b - Quelle est l'aire a_0 de l'hexagone K_0 ?

3.c - On admettra que l'aire de K_{n+1} est l'aire de K_n augmentée des aires des triangles qui ont été ajoutés. Quelle est l'aire a_n de K_n ?

Indication Exprimer a_n en fonction de a_{n-1} puis déterminer a_n en fonction de n .

4 - Que fait p_n quand $n \rightarrow +\infty$?

5 - Démontrer que la suite (a_n) converge et donner sa limite.

6 - Quel est le premier flocon dont le périmètre est au moins 10 km ? Combien vaut son aire ?

