Théorème de Thébault TS

Fiche Professeur

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

Objet de l'activité : Démontrer par les nombres complexes le théorème de Thébault, à savoir : « Les centres des carrés construits sur les côtés d'un parallélogramme à l'extérieur de celui-ci sont les sommets d'un carré ». Il y a d'autres solutions dont une solution purement géométrique (cf. [4]), une solution de géométrie analytique et trigonométrique (cf. ([2]). La solution par les nombres complexes est courte et pratiquement sans calcul.

Commentaires :

• Ce résultat inattendu est assez bluffant. Il est étonnant qu'on l'ait découvert si tard alors que l'on fait de la géométrie depuis plus de 4000 ans. Que font les géomètres ?

• La démonstration calculatoire par les nombres complexes est très simple. La solution de [2] porte sur des calculs à 6 paramètres, à savoir les coordonnées des points A, B et C. Dans la démonstration par les nombres complexes, les données se réduisent à 3 paramètres, à savoir les affixes des points A, B et C.

• Ces calculs sont simples s'ils sont bien menés. Les élèves devront être étroitement encadrés.

• Globalement, on peut dire que cette activité est plutôt difficile.

• On pourrait démontrer de manière analogue le théorème de Napoléon (cf. [1], [3]).

Compétences engagées :

✓ Affixe d'un vecteur, forme trigonométrique d'un nombre complexe : module, argument, interprétation dans un repère orthonormé direct.

✓ Formules d'addition des sinus et des cosinus pour : $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$.

✓ Construction géométrique de la somme de deux vecteurs.

✓ Théorème de Thalès.

✓ Connaissance très élémentaire de « GeoGebra »(à la rigueur, le même travail peut être fait avec « scilab » à la place de « GeoGebra » ; utiliser « GeoGebra » est plus agréable).

Matériel utilisé : Ordinateurs équipés de « GeoGebra » (sinon, de « scilab pour les lycées »).

Durée indicative : 1h en salle informatique, préparation à la maison.

Fichiers téléchargeables : Les fiches « Élève et Prof » (fichiers pdf) sont téléchargeables ainsi que le fichier « Thebault.ggb »(fichier « GeoGebra » qui donne la figure finale, voir la question **5.a** ; les points A, B et C sont libres).

Solution :

1 - $v = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ implique

$$\begin{aligned} iv &= r(-\sin\theta + i\cos\theta) \\ &= r\left(\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right) \end{aligned}$$

Comme $r > 0$, c'est la forme trigonométrique de iv. Son module est donc r et son argument est $\theta + \frac{\pi}{2}$.

2 - D est caractérisé par

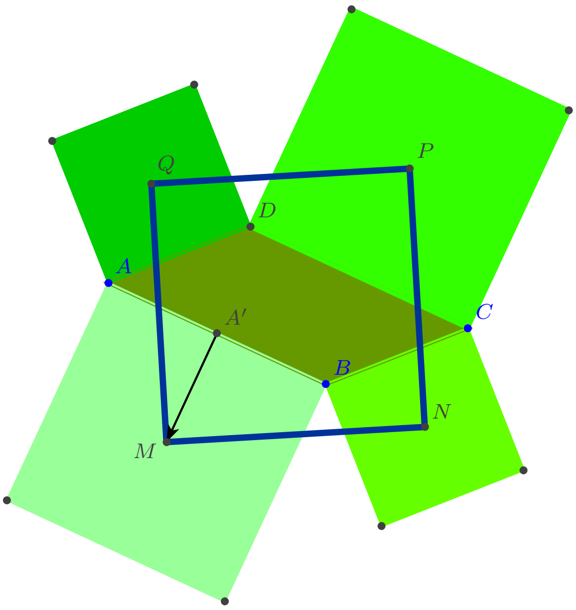
$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \\ &\iff \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &\iff d = a + c - b \end{aligned} \tag{1}$$

3 - $\overrightarrow{OA'} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right) \iff a' = \dfrac{1}{2}(a+b)$. L'affixe de $\overrightarrow{A'A}$ est $\alpha = a - a' = \dfrac{a-b}{2}$.

4.a - D'après la question **1**, le vecteur d'affixe $i\alpha$ est $\overrightarrow{A'M}$, donc $\beta = i\alpha$.

4.b - Comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M}$, $m = \dfrac{a+b+i(a-b)}{2}$.

5.a - On peut évidemment faire la conjecture que $MNPQ$ est un carré, propriété qui semble résister quand on fait bouger les points A, B ou C, qui sont libres.



5.b - n, p et q s'obtiennent par permutation circulaire des paramètres a, b, c et d. Voici le tableau qui rassemble les résultats :

m	$\dfrac{a+b+i(a-b)}{2}$
n	$\dfrac{b+c+i(b-c)}{2}$
p	$\dfrac{c+d+i(c-d)}{2}$
q	$\dfrac{d+a+i(d-a)}{2}$

6.a - L'affixe de $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ est

$$\frac{b+c+i(b-c)}{2} - \frac{a+b+i(a-b)}{2} = \frac{c-a-i(a+c)}{2} + ib$$

L'affixe de $\overrightarrow{PQ}$ se déduit de l'affixe de $\overrightarrow{MN}$ par deux permutations circulaires successives, ce qui échange a et c ainsi que b et d. Une nouvelle permutation circulaire à partir de l'affixe de $\overrightarrow{PQ}$ donne l'affixe de $\overrightarrow{QM}$. On obtient :

affixe de $\overrightarrow{PQ}$	$\dfrac{a-c-i(c+a)}{2} + id$	affixe de $\overrightarrow{QM}$	$\dfrac{b-d-i(d+b)}{2} + ia$

Si l'on remplace d par $a+c-b$, cf. (1), on obtient finalement :

affixe de $\overrightarrow{MN}$	$\dfrac{c-a-i(a+c)}{2}+ib$
affixe de $\overrightarrow{PQ}$	$\dfrac{a-c+i(a+c)}{2}-ib$
affixe de $\overrightarrow{QM}$	$b-\dfrac{a+c+i(c-a)}{2}$

6.b - On constate que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QM}$, ce qui prouve que $MNPQ$ est un parallélogramme.

6.c - On constate aussi que l'affixe de $\overrightarrow{QM}$ est i fois l'affixe de $\overrightarrow{PQ}$, donc ces vecteurs sont orthogonaux de même longueur (cf. question **1**). $MNPQ$ est bien un carré.

6.d - « Les centres des carrés construits sur les côtés d'un parallélogramme à l'extérieur de celui-ci sont les sommets d'un carré ».

Références

[1] *Théorème de Napoléon*, activité pour la classe de TS
`http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSGeometrie3.htm`

[2] *Théorème de Thébault*, activité pour la classe de Première S
`http://gradus-ad-mathematicam.fr/Premiere_Geometrie1.htm`

[3] Wikipedia : *Théorème de Napoléon*
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Theoreme_de_Napoleon`

[4] Wikipedia : *Théorème de Thébault*
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Theoreme_de_Thebault`