Théorème de Thébault **TS**

Fiche Élève

Le théorème de Thébault est une propriété du parallélogramme conjecturée en 1937 et démontrée en 1938.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct.

1 - Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe $v \neq 0, \overrightarrow{V'}$ le vecteur d'affixe iv. La forme trigonométrique de v est notée $v = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

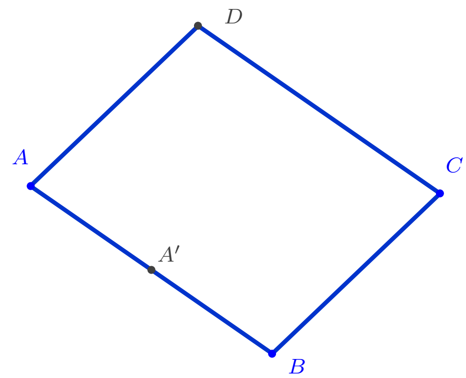
Écrire iv sous sa forme trigonométrique. En déduire son module et son argument.

2 - Soit A, B et C trois points non alignés du plan d'affixes respectifs a, b et c. Soit D le point tel que $ABCD$ soit un parallèlogramme.

2.a - *Nous ferons la construction géométrique au fur et à mesure des calculs.* Dans une fenêtre de géométrie de « GeoGebra » :

- créer trois points non alignés A, B et C.
- définir D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Indication : Saisir $D = A - B + C$ (commande « GeoGebra » qui traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, que l'on justifiera).



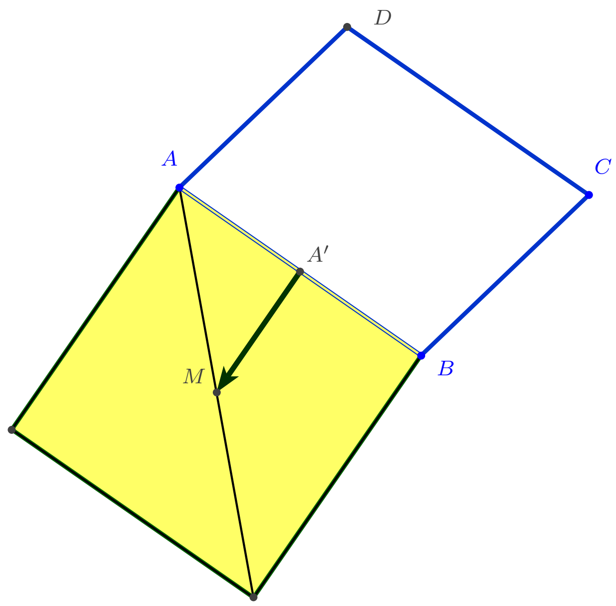
2.b - Déterminer, en fonction de a, b et c, l'affixe d de D.

3 - Déterminer, en fonction de a, b, c et d, l'affixe a' du point A', milieu du segment $[AB]$ et l'affixe α du vecteur $\overrightarrow{A'A}$.

4 - Construire, à l'extérieur du parallélogramme $ABCD$, le carré dont l'un des côtés est le segment $[AB]$.

Indication : Utiliser la commande « Polygone régulier » de « GeoGebra ».

On appelle M le milieu de sa diagonale issue de A, m son affixe.



4.a - Quel est l'affixe β du vecteur $\overrightarrow{A'M}$?

Indication : Utiliser la question **1**.

4.b - Calculer m.

Commentaires : M, intersection des diagonales et des médianes du carré construit sur $[AB]$ est le centre de ce carré.

5 - À l'extérieur du parallélogramme $ABCD$,

- construire les carrés de côtés respectifs $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$,
- faire apparaître les centres N, P et Q de ces carrés.

5.a - Quelle conjecture peut-on faire sur le quadrilatère $MNPQ$?

5.b - Calculer, en fonction de a, b, c et d, les affixes n, p et q de N, P et Q.

Indication : La valeur de n, p et q s'écrit directement sans aucun calcul. En effet, on remarquera que le point N est construit à partir des points B et C exactement de la même manière que le point M a été construit à partir des points A et B. On obtient donc n à partir de m en remplaçant a par b et b par c. On utilise ensuite de nouveau cette remarque pour écrire p et q.

6 - Démonstration du théorème de Thébault par les nombres complexes :

6.a - Calculer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QM}$ en fonction de a, b, c et d.

Indication : Il suffit de calculer l'affixe de $\overrightarrow{MN}$. Les deux autres affixes s'en déduisent sans calcul.

6.b - Démontrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Qu'en déduit-on ?

6.c - Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{MQ}$. En déduire que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.

Indication : Comparer les composantes de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MQ}$ en utilisant la question **1**.

6.d - Énoncer le théorème obtenu.