Théorème de Napoléon

TS

Fiche Élève

Le théorème de Napoléon est la solution d'un problème sur le triangle qui aurait été posé par Napoléon à Lagrange, qui l'aurait résolu.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct. On admettra que le centre M d'un triangle ABC (le centre d'un triangle est le point d'intersection de ses médianes) vérifie la relation

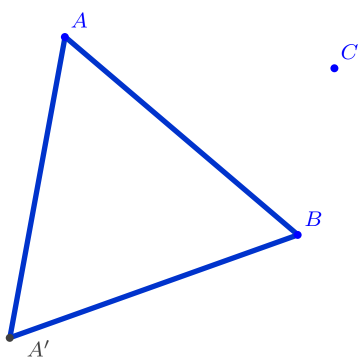
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \right) \tag{1}$$

1 - Soit $\overrightarrow{V}$ un vecteur d'affixe $v \neq 0$. La forme trigonométrique de v est notée $v = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$.
On pose $J = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on considère le vecteur $\overrightarrow{V'}$ d'affixe $v' = Jv$.
Écrire v' sous sa forme trigonométrique. En déduire son module et un de ses arguments.
Indication : On écrira d'abord J sous forme trigonométrique.

2 - Soit A, B et C trois points non alignés du plan, d'affixes respectifs a, b et c. On construit, à l'extérieur du triangle ABC, les triangles équilatéraux BAA', CBB' et ACC'. On appelle M, N et P les centres respectifs de ces triangles. On va voir que le triangle MNP est remarquable.

2.a - *Construction géométrique avec « GeoGebra »*. Dans une fenêtre de géométrie de « GeoGebra » :

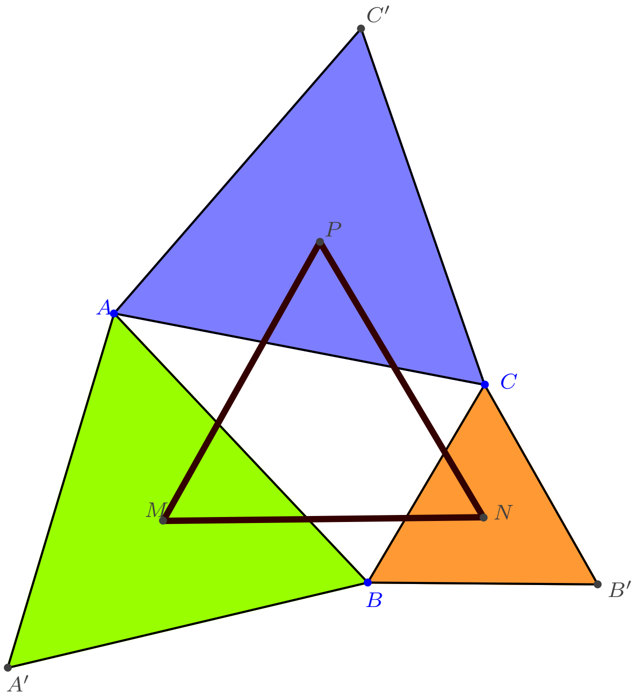
- créer trois points non alignés A, B et C.
- pour construire le triangle équilatéral BAA' extérieur au triangle ABC, utiliser le côté $[BA]$ et la commande « Polygone régulier » de « GeoGebra ».



- construire de même les triangles CBB' et ACC'.
- placer les points M, N et P.

Indication : Compte-tenu de (1), on pourra utiliser la commande $M = (B + A + A')/3$.

- tracer le triangle MNP.



2.b - Quelle conjecture peut-on faire sur le triangle MNP ? On pourra se rappeler que les points A, B et C sont libres.

3 - Soit $\alpha = a - b$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{BA}$. Quel est l'affixe α' du vecteur $\overrightarrow{BA'}$?

4 - *Calcul des affixes m, n et p des points M, N et P*

4.a - Démontrer que

$$m = \frac{1+J}{3} \cdot a + \frac{2-J}{3} \cdot b$$

4.b - Remarquons que le point N s'obtient à partir de B et de C exactement de la même manière que M à partir de A et de B. En déduire, sans nouveau calcul, la valeur de n.

4.c - En déduire de même la valeur de p.

5 - *Démonstration du théorème de Napoléon*

5.a - Calculer les affixes x et y des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.

5.b - Calculer $y - Jx$.

Indication : On pourra démontrer ou admettre que $1 - J + J^2 = 0$.

5.c - Conclure. Énoncer le théorème obtenu.