La planche de Galton
- scilab -

1S

Fiche Professeur

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

Objet de l'activité : Simuler le fonctionnement de la planche de Galton comme répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes, reconnaître une loi binomiale. Puis, en lâchant la bille un grand nombre de fois, comparer les probabilités de cette loi binomiale et les fréquences, procédant ainsi à une approche heuristique de la loi des grands nombres.

But de l'activité : Reconnaître une loi binomiale, illustrer la loi des grands nombres par un exemple historique et ludique qui montre que lors d'un grand nombre de répétitions identiques et indépendantes d'une expérience aléatoire $(\mathscr{E})$, la fréquence de réalisation d'un événement lié à $(\mathscr{E})$ est voisine de sa probabilité.

Commandes scilab utilisées :
`tirage_entier(n,a,b)`, `loi_binomiale(n,p)`, `sum`, `zeros`, `input`.

Compétences engagées :
✓ Connaître le b-a ba de « scilab » ; boucle « for ».
✓ Approche heuristique de la loi des grands nombres.

Matériel utilisé : Ordinateur équipé de « scilab ».

Durée indicative : 1h en salle informatique.

Déroulement de la séance :

La partie **A** pourrait être préparée à la maison. L'adresse suivante :

http://www.univ-rouen.fr/LMRS/Vulgarisation/Galton/galton.html

pourrait être donnée aux élèves pour cela. C'est l'adresse d'une excellente animation de la planche de Galton réalisée au Laboratoire LMRS de l'université de Rouen.

Sources : Le logo de cette activité est tiré de *Planche de Galton*, ébauche d'article de l'encyclopédie en ligne Wikipedia , à l'adresse :

http://fr.wikipedia.org/wiki/Planche_de_Galton

Mots-clefs : Algorithmique, simulation, codage, effectifs, fréquences, approche heuristique de la loi des grands nombres.

Solution :

Partie A. Étude de $(\mathscr{E})$

1.a - Évident. La bille tombera dans le premier godet, autrement dit, $x = 0$.

1.b - On peut dire que c'est évident : la bille tombera dans le deuxième godet, autrement dit, $x = 1$. Si on veut détailler un peu, il suffit de comparer avec le cas précédent. Quand la bille passe à droite au lieu de passer à gauche, elle se décale horizontalement de 1. Les autres mouvements étant identiques au cas précédent, elle tombera dans le godet immédiatement à droite du premier, soit dans le deuxième, donc $x = 1$.

2 - Il est évident que $d = x$. En effet, chaque fois que la bille passe à droite au lieu de passer à gauche (en référence au parcours de la question **1.a**), il y a un décalage horizontal de 1 vers la droite. Le nombre de "D" est dont la longueur du décalage vers la droite, c'est à dire le numéro du godet dans lequel tombe la bille.

3 - On peut identifier $(\mathscr{E})$ à une suite de tirages au hasard de "G" ou "D" avec la probabilité $\frac{1}{2}$, ces tirages étant indépendants. On sait que dans cette situation, le nombre de réalisations de l'événement « "D" a été tiré » est une variable aléatoire - qui peut être identifiée à X - qui suit la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)$ (loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$).

Partie B. Simulation

4 - Si on code "G" par 0 et "D" par 1, la somme de la suite de 0 et de 1 obtenus en simulant $(\mathscr{E})$ sera le nombre de passages par la droite, c'est à dire la valeur de x (valeur de X pour la réalisation de $(\mathscr{E})$ considérée). Ce qui donne le script suivant :

Listing 1 – Godet atteint lors de la simulation d'un seul parcours sur la planche de Galton

```
clear;
n=input('n=');//Nombre de rangées de clous.
exp=tirage_entier(n,0,1);
afficher(sum(exp));
```

En exécutant cet l'algorithme (pour $n = 6$), nous avons obtenu 4, ce qui signifie que la bille est allée dans le godet n°4, qui est le cinquième godet du dessin.

5.a - On pourra utiliser l'algorithme suivant :

Listing 2 – Calcul des effectifs des godets quand on répète l'expérience

```
clear;
n=input('n=');//Nombre de rangées de clous.
p=input('p=');// Nombre de lâchers de la bille.
Eff=zeros(1,n+1);//Initialisation du compteur des effectifs
for j=1:p
    exp=tirage_entier(n,0,1);
    x=sum(exp);
    Eff(x+1)=Eff(x+1)+1;
end
afficher(Eff);
```

5.b - Exécuté pour n=4 et p=100000, nous avons obtenu :

Listing 3 – Effectifs après 100000 répétitions de l'expérience quand il y a 4 rangées de clous.

```
   6275.     25264.     37468.     24834.     6159.
```

Partie C. Approximation d'une probabilité par des fréquences

6.a - Le vecteur $(P(X=0), P(X=1), \ldots, P(X=n))$ est donné par la commande « scilab » `loi_binomiale(n,1/2)`. On pourra donc facilement le comparer avec le vecteur des fréquences, par exemple à l'aide de l'algorithme suivant [1] :

Listing 4 – Fréquence et probabilité de `(X=i)`

```
clear;
n=input('n=');
p=input('p=');
Eff=zeros(1,n+1);//Initialisation du compteur des effectifs
for j=1:p
    exp=tirage_entier(n,0,1);
    s=sum(exp);
    Eff(s+1)=Eff(s+1)+1;
end
```

1. Cette vérification n'est pas une preuve.

```
Frequences=Eff/p;
afficher(Frequences);
Binomiale=loi_binomiale(n,1/2);
afficher(Binomiale);
```

Exécuté pour $n = 4$ et $p = 100000$, cet algorithme a retourné le résultat suivant :

Listing 5 – Une exécution de l'algorithme précédent

```
        column 1 to 4

    0.06148     0.25011     0.37509     0.25081

         column 5

    0.06251
-->Binomiale=loi_binomiale(n,1/2);
-->afficher(Binomiale);

    0.0625    0.25    0.375    0.25    0.0625
```

On constate que les 2 vecteurs considérés ne sont pas loin d'être égaux.

6.b - On peut penser, au vu de **6.a** que, quels que soient n et p, quand p est grand, le vecteur des fréquences de réalisation des événements $(X = i)$, $i = 0, \dots, n$ est une bonne approximation du vecteur de leurs probabilités. Ce faisant, on découvre une version de la loi des grands nombres, qu'il conviendrait de démontrer.