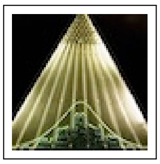
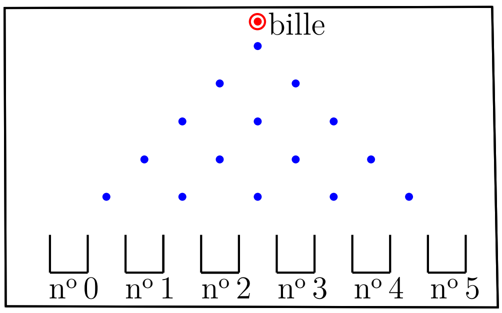


La planche de Galton - scilab -

Fiche Élève

1S

Sur une planche rectangulaire, on a planté un réseau de clous formant un triangle isocèle dont l'axe de symétrie se confond avec une médiane de la planche rectangulaire.
Sur une première rangée se trouve un premier clou, sur une deuxième rangée, deux clous, sur une troisième rangée, trois clous et ainsi de suite. On trouvera ainsi n clous sur la $n^{\text{ème}}$ rangée ($n \geqslant 2$).
On considère l'expérience aléatoire ($\mathscr{E}$) suivante : la planche est inclinée et une bille est lâchée au-dessus de l'unique clou de la première rangée. L'espacement des clous a été étudié afin que la bille, lorsqu'elle heurte un clou, ait autant de chances de passer à droite ou à gauche de ce clou pour aller heurter un clou de la rangée suivante qu'elle évitera soit par la droite, soit par la gauche, avec la même probabilité.
En bas de la planche se trouvent $(n+1)$ godets dont l'un recevra la bille à l'issue de son parcours aléatoire sur la planche.
Cette planche de Galton se comporte en quelque sorte comme un flipper inerte.



Partie A. Étude de ($\mathscr{E}$)

Numérotons les godets de gauche à droite de 0 à n et notons x le numéro du godet atteint par la bille. x est un nombre aléatoire.
1.a - Supposons que, pour chaque clou, la bille passe à gauche (en regardant la figure). Dans quel godet tombera-t-elle, autrement dit, combien vaudra x, à l'issue de cette expérience aléatoire ?

1.b - Même question en supposant que, pour chaque clou, la bille passe toujours à gauche sauf une fois où elle passe à droite.

2 - On peut coder un itinéraire suivi par la bille par un "mot" de longueur n écrit avec les lettres "G" et "D". Par exemple, GGDG ... indique que la bille est passée à gauche en heurtant le premier clou, puis à gauche au niveau du deuxième clou, puis à droite du troisième clou, puis à gauche, ...
À chacun de ces "mots", on associe le nombre d de "D" qu'il contient. Comparer x et d.
3 - On note X la variable aléatoire qui prend la valeur x quand on réalise cette expérience aléatoire. Quelle est la loi de X ?

Partie B. Simulation

On rappelle que la commande « scilab » `tirage_entier(`n`,0,1)` fournit un vecteur de n nombres égaux à 0 ou 1, ces nombres ayant été choisis au hasard, indépendamment les uns des autres, avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

4 - Simuler le parcours d'une bille sur la planche de Galton à $n \geqslant 2$ rangées de clous avec un algorithme « scilab » affichant en sortie le numéro du godet atteint.

5 - On lâche successivement, dans les conditions décrites précédemment, un grand nombre p de billes et on observe les effectifs de ces billes dans les différents godets.

5.a - Modifier l'algorithme précédent afin qu'il retourne la répartition des p billes dans les $(n+1)$ godets. On utilisera une boucle "pour". La répartition des billes sera collectée sous la forme du tableau à une ligne et $n+1$ colonnes dont la $i^{\text{ème}}$ coordonnée sera le nombre de billes tombées dans le godet numéro $i-1$.
5.b - Tester le script *scilab* précédent dans le cas $n = 4$ et $p = 100000$.

Partie C. Approximation d'une probabilité par des fréquences

6.a - On suppose toujours que $n = 4$ et que l'expérience $(\mathscr{E})$ est répétée 100000 fois. Pour $i = 0, 1, \ldots, n$, calculer $P(X = i)$ et comparer cette probabilité avec la fréquence d'arrivée de la bille dans le godet numéro i.

6.b - Conclure.