Théorème de Thébault 1S

Fiche Professeur

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

Objet de l'activité : Découvrir et démontrer le théorème de Thébault, à savoir : « Les centres des carrés construits sur les côtés d'un parallélogramme à l'extérieur de celui-ci sont les sommets d'un carré ». Ce résultat inattendu très simple est assez bluffant.
But de l'activité : Il y a plusieurs solutions possibles dont une solution géométrique (cf. [1]) et une solution analytique par les nombres complexes. On fait découvrir ici le théorème à l'aide d'une construction « GeoGebra », puis on prouve le résultat entrevu en s'appuyant sur le cercle trigonométrique et sur les relations $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$. Les calculs sont à la fois fastidieux et très simples : ils ne comportent que des échanges de coordonnées et des additions.

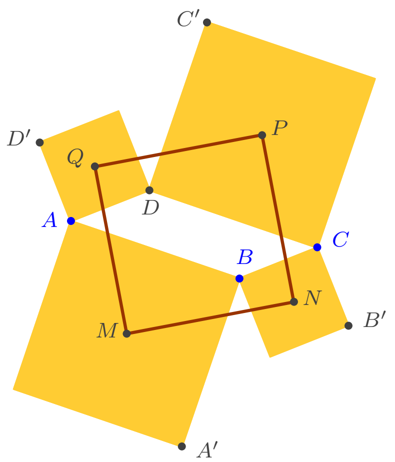
Compétences engagées :

- ✓ Plan orienté, représentation des angles sur le cercle trigonométrique.
- ✓ Angle de 2 vecteurs, orthogonalité.
- ✓ Relations $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\theta)$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$.
- ✓ Manipulations linéaires sur les vecteurs.
- ✓ Connaissance très élémentaire de « GeoGebra »(à la rigueur, le même travail peut être fait avec « scilab » à la place de « GeoGebra » ; utiliser « GeoGebra » est plus agréable).

Matériel utilisé : Ordinateurs équipés de « GeoGebra » (sinon, de « scilab pour les lycées »).
Durée indicative : 1h en salle informatique pour la partie **A**. La partie **B** pourrait convenir comme devoir à la maison.
Fichiers téléchargeables : Les fiches « Élève et Prof » (fichiers pdf) sont téléchargeables ainsi que le fichier « Thebault.ggb »(fichier « GeoGebra » qui donne la figure finale ; les points A, B et C sont libres).

Solution :

Partie A. Découvrir le théorème de Thébault



Cette construction « GeoGebra » est très simple : on crée d'abord 3 points A, B et C non alignés, puis D en saisissant la formule $D = B + C - A$, puis on construit les 4 carrés à l'aide de la commande de construction de polygones réguliers. Enfin, on fait apparaître M, N, P et Q comme milieu d'une diagonale des carrés construits sur $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement. On a l'impression très nette que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré, ce qui a été conjecturé par Thébault en 1937. C'est un résultat très curieux et assez tardif (puisque l'on fait de la géométrie depuis plus de 4000 ans).

Partie B. Démontrer le théorème de Thébault

1 - Le point D est défini par $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$. Ses coordonnées d et δ vérifient donc :

$$\begin{cases} d = & a + c - b \\ \delta = & \alpha + \gamma - \beta \end{cases} \tag{1}$$

2 - La définition des fonctions sin et cos à partir du cercle trigonométrique montre que $x' = -y$ et $y' = x$ (parce que $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -sin(\theta)$ et $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos(\theta)$).

3 - D'après la question **2**, $\overrightarrow{BA'}$ a pour composantes $\beta - \alpha$ et $a - b$. On en déduit les coordonnées de A' à partir de la relation $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA'}$. Elles sont reportées à la première ligne du tableau qui suit. Les coordonnées de B', C' et D' s'en déduisent par permutation circulaire sur les lettres a, b, c et d d'une part, α, β, γ et δ d'autre part.

Point	Abscisse	Ordonnée
A'	$b + \beta - \alpha$	$\beta + a - b$
B'	$c + \gamma - \beta$	$\gamma + b - c$
C'	$d + \delta - \gamma$	$\delta + c - d$
D'	$a + \alpha - \delta$	$\alpha + d - a$

4 - Les coordonnées de M, N, P et Q s'en déduisent par demi-somme ($\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA'})$, *etc*). Les résultats obtenus sont consignés dans le tableau qui suit :

Point	Abscisse	Ordonnée
M	$\frac{a + b + \beta - \alpha}{2}$	$\frac{\alpha + \beta + a - b}{2}$
N	$\frac{b + c + \gamma - \beta}{2}$	$\frac{\beta + \gamma + b - c}{2}$
P	$\frac{c + d + \delta - \gamma}{2}$	$\frac{\gamma + \delta + c - d}{2}$
Q	$\frac{d + a + \alpha - \delta}{2}$	$\frac{\delta + \alpha + d - a}{2}$

5.a - Les composantes de $\overrightarrow{MN}$ sont reportées à la première ligne du tableau suivant. Les composantes de $\overrightarrow{PQ}$ s'en déduisent en faisant deux permutations circulaires sur les lettres a, b, c et d d'une part, α, β, γ et δ d'autre part. On obtient :

Vecteur	Composante sur $x'x$	Composante sur $y'y$
$\overrightarrow{MN}$	$-\beta + \frac{-a + \alpha + c + \gamma}{2}$	$b - \frac{a + \alpha + c - \gamma}{2}$
$\overrightarrow{PQ}$	$-\delta + \frac{-c + \gamma + a + \alpha}{2}$	$d - \frac{c + \gamma + a - \alpha}{2}$

Ensuite, on élimine d et δ en tenant compte de (1), ce qui donne :

Vecteur	Composante sur $x'x$	Composante sur $y'y$
$\overrightarrow{PQ}$	$\beta + \frac{a - \alpha - c - \gamma}{2}$	$-b + \frac{a + \alpha + c - \gamma}{2}$

On constate que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, ce qui prouve que $MNPQ$ est un parallélogramme.

5.b - Le calcul des composantes de $\overrightarrow{MQ}$ est analogue. Ayant éliminé d et δ comme précédemment, on obtient :

Vecteur	Composante sur $x'x$	Composante sur $y'y$
$\overrightarrow{MQ}$	$-b + \frac{a + \alpha + c - \gamma}{2}$	$-\beta + \frac{-a + \alpha + c + \gamma}{2}$

D'après la question **2**, cela prouve que $\overrightarrow{MQ}$ se déduit de $\overrightarrow{MN}$ par une rotation de centre M et d'angle $+\frac{\pi}{2}\cdot$ $MNPQ$ est donc un carré.

Références

[1] Wikipedia : *Théorème de Thébault*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Theoreme_de_Thebault