Théorème de Thébault 1S

Fiche Élève

Le théorème de Thébault est une propriété du parallélogramme conjecturée en 1937 et démontrée en 1938.

Partie A. Découvrir le théorème de Thébault

Dans une fenêtre de géométrie (« GeoGebra ») :

• créer trois points non alignés A, B et C.

• définir D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Indication : Saisir $D = A - B + C$ (commande « GeoGebra » qui traduit l'égalité vectorielle $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$).

• à l'extérieur du parallélogramme, construire les carrés de côtés respectifs $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.

• faire apparaître les centres de ces quatre carrés : M, N, P et Q respectivement.

Indication : On pourra utiliser la commande « milieu ou centre » d'une diagonale de chacun de ces carrés.

• construire le polygone $MNPQ$.

• conclure.

Partie B. Démontrer le théorème de Thébault

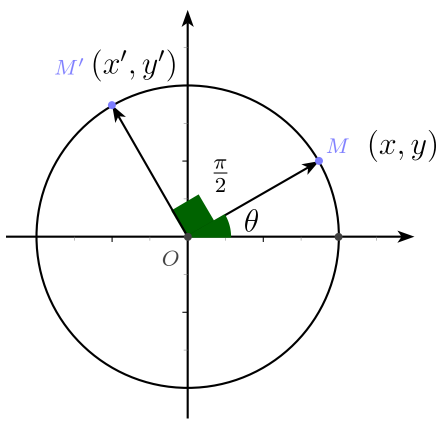
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1 - Les coordonnées de A, B et C sont notées respectivement (a, α), (b, β) et (c, γ). Déterminer les coordonnées (d, δ) du point D en fonction de $a, \alpha, b, \beta, c, \gamma$.

2 - Question auxiliaire :

On fait subir à un point M du cercle trigonométrique, de coordonnées x et y une rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}\cdot$ On appelle M' le point obtenu (voir la figure). Exprimer les coordonnées x' et y' de M' en fonction de x et y.

Commentaire : Cela montre que si on fait tourner de $+\frac{\pi}{2}$ un vecteur de composantes u et v, on obtient le vecteur de composantes $-v$ et u.



3 - *Retour à la démonstration du théorème de Thébault.* On appelle

• A' le point obtenu en faisant tourner A de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point B,

• B' le point obtenu en faisant tourner B de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point C,

• C' le point obtenu en faisant tourner C de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point D,

• D' le point obtenu en faisant tourner D de $+\frac{\pi}{2}$ autour du point A.

Calculer les coordonnées de ces points.

Indication : Pour calculer les coordonnées de A', on partira de $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA'}$. Les autres calculs sont analogues.

4 - Calculer les coordonnées des points M, N, P et Q, respectivement milieux des segments $[AA'], [BB'], [CC']$ et $[DD']$.

5.a - Démontrer que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$. Qu'en déduit-on ?

5.b - Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{MQ}$. En déduire que le quadrilatère $MNPQ$ est un carré.
Indication : On comparera les composantes de $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MQ}$ en pensant à la question **2**.