Le problème du collectionneur

Collection de trois objets
Fiche Professeur

TS

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

But de l'activité : Modéliser le problème - aléatoire - du collectionneur, s'intéresser au nombre de coups qu'il faut jouer pour obtenir la collection complète des trois objets avec une probabilité d'au moins 0.95, résoudre ce problème, ce qui conduira à considérer des suites définies par récurrence.
Niveau de difficulté de l'activité : soutenu.

Mots-clefs : Modélisation, probabilités conditionnelles, la somme des probabilités vaut 1, suites récurrentes, hypothèse de récurrence, suites géométriques, inéquations.

Plus précisément, on utilise, en Calcul des probabilités, les propriétés suivantes :
✓ si $\mathbb{P}(A) > 0, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}_A(B)$,
✓ si les événements A, B et C sont deux à deux disjoints, $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$,
✓ si de plus $A \cup B \cup C$ est l'événement certain Ω, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) = 1$.

Documents utiles à télécharger :
✓ Fiche Élève (pdf)
✓ Fiche Professeur (pdf)

Matériel utilisé : Calculatrice ou ordinateur équipé d'un logiciel de calcul.

Durée indicative : La fiche Élève peut être donnée comme travail à préparer à la maison. Dans ce cas, une heure est suffisante.

Solution et commentaires :

Première partie : modélisation du problème

1 - X_1 ne prend que la valeur 1, X_2 prend les valeurs 1 et 2 (1 si on tire 2 fois le même chiffre aux 2 premiers tirages, 2 sinon) ; pour tout entier $n \geqslant 3$, X_n prend les valeurs 1, 2 et 3 (1 si on tire toujours le même chiffre aux n premiers tirages, 2 si on tire 2 chiffres différents au cours de ces tirages, 3 sinon).

2 - On suppose que $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$. Cela n'est pas toujours vrai. Par exemple, $\mathbb{P}(X_2 = 3) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$; on ne peut pas conditionner par cet événement.

✓ Cas $i < 3$: si $X_n = i$, X_{n+1} ne peut prendre que la valeur i ou la valeur $i+1$. Elle prend la valeur i si on tire un nombre qui a déjà été tiré. Le nombre de cas favorables est i ; le nombre de cas possibles est 3. La probabilité correspondante est $\dfrac{i}{3}$, donc on posera $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i) = \dfrac{i}{3}$; de même, on posera $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = i+1) = \dfrac{3-i}{3}\cdot$ La troisième probabilité conditionnelle demandée sera bien sûr 0 puisque la somme des probabilités conditionnelles est 1.

✓ Cas $i = 3$: dans ce cas, X_{n+1} vaut nécessairement 3. On posera donc $\mathbb{P}_{(X_n=3)}(X_{n+1} = 3) = 1$ et on donnera la valeur 0 aux deux autres probabilités conditionnelles.

Remarque :
✓ Bien sûr, la suite de variables aléatoires $(X_n,\ n \geq 1)$ est une chaîne de Markov d'espace des

états $\{1,2,3\}$, de loi initiale $L_0 = (1,0,0)$, voir la question **3.a** et de matrice de transition

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

✓ Il est démontré dans l'annexe 1 de la fiche Professeur de [3] que dans le cas général où il y aurait $N \geqslant 2$ sortes d'autocollants, toute valeur prise par la variable aléatoire X_n, $n \geqslant 1$, est prise avec probabilité > 0.

Deuxième partie : loi de X_n

3.a - $(X_1 = 2)$, $(X_1 = 3)$, $(X_2 = 3)$ sont des événements impossibles, donc $y_1 = z_1 = z_2 = 0$. $(X_1 = 1)$ est l'événement certain, donc $x_1 = 1$. Dans les calculs qui suivent, on utilise les probabilités conditionnelles définies à la question **2**.

$$x_2 = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1) \cdot \mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_2 = 1) = \frac{1}{3}$$

Comme la somme des probabilités des valeurs prises par une variable aléatoire vaut 1 (propriété qui sera plusieurs fois utilisée dans la suite), on en déduit que

$$y_2 = 1 - (x_2 + z_2) = \frac{2}{3}$$

Passons à la loi de X_3 :

$$x_3 = \mathbb{P}(X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) \cdot \mathbb{P}_{(X_2=1)}(X_3 = 1) = x_2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}$$

$$z_3 = \mathbb{P}(X_3 = 3) = \mathbb{P}(X_2 = 2, X_3 = 3) = \mathbb{P}(X_2 = 2) \cdot \mathbb{P}_{(X_2=2)}(X_3 = 3) = y_2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3^2}$$

On en déduit que

$$y_3 = 1 - (x_3 + z_3) = \frac{2}{3}$$

En résumé, les lois de X_1, X_2 et de X_3 sont $(1,0,0)$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$ et $\left(\frac{1}{3^2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}\right)$.

3.b - D'après la question **3.a**, les relations (4) sont satisfaites pour $n = 2$ et $n = 3$. Nous supposons maintenant $n \geqslant 4$. En partant de l'égalité ensembliste (3), en utilisant l'additivité de la probabilité, puis les conditionnements comme ci-dessus, on obtient :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_{n+1} = j, X_n = i) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(X_n = i) \cdot \mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$$

ce qui donne, d'après la question **2** , pour tout entier $n \geqslant 4$:

$$\forall n \geqslant 2, \quad x_n = \frac{1}{3} \cdot x_{n-1}, \quad y_n = \frac{2}{3} \cdot x_{n-1} + \frac{2}{3} \cdot y_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{3} \cdot y_{n-1} + z_{n-1}$$

Finalement, ces relations de récurrence sont vraies pour tout entier $n \geqslant 2$.

3.c - La suite (x_n) étant la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $x_1 = 1$, $x_n = \frac{1}{3^{n-1}}$.

3.d - On pourrait calculer les premiers termes de la suite (y_n) et deviner l'hypothèse de récurrence sur la forme de y_n (c'est ainsi que cette question avait d'abord été rédigée). C'est plutôt compliqué pour les élèves. De toute façon, on sent bien ici le manque de calcul matriciel (voir [2]). Démontrons par récurrence la formule donnée pour y_n dans la nouvelle rédaction :

• la propriété est vraie au rang $n = 1$ puisque $y_1 = 0$.

• si on suppose que pour un certain entier $n \geqslant 1$, $y_n = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}}$ alors, d'après la question **3.c**

$$y_{n+1} = x_n \cdot \frac{2}{3} + y_n \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2^n - 2}{3^{n-1}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3^n} + \frac{2^{n+1} - 2^2}{3^n} = \frac{2^{n+1} - 2}{3^n}$$

ce qui montre que la propriété est héréditaire.

• ainsi, la propriété est vraie au rang 1 et elle est héréditaire. Elle est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

3.e - De $x_n + y_n + z_n = 1$, on déduit, $z_n = 1 - x_n - y_n = \dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}}$.

3.f - $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} z_n = 1$.

3.g - $E \subseteq (X_n < 3) = (X_n = 1) \cup (X_n = 2) \Longrightarrow \mathbb{P}(E) \leqslant x_n + y_n = 1 - z_n$. Ceci étant vrai quel que soit $n \geqslant 1$ et compte tenu de la question **3.f**, on en déduit que $\mathbb{P}(E) = 0$. Cela veut dire que si on réalise cette expérience (consistant à acheter indéfiniment des tablettes de chocolat), on est sûr d'obtenir les 3 autocollants, à un moment que l'on ne peut préciser. Il est faux, par exemple, de dire que « si on achète un milliard de tablettes de chocolat, on aura les 3 autocollants » ou que que « si Anna a obtenu les 3 autocollants au bout de 3 achats, elle les obtiendra de nouveau au bout de 3 achats si elle recommence ».

Troisième partie : calcul de la solution

4.a - Le problème posé revient à trouver le plus petit entier n tel que l'inéquation $z_n \geqslant 0.95$, autrement dit $\dfrac{3^{n-1} - 2^n + 1}{3^{n-1}} \geqslant 0.95$, soit satisfaite. Ce problème a une solution parce que $z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$.

4.b - On résout l'inéquation à la calculatrice ou à l'aide d'un logiciel de calcul. On trouve que $n = 11$ est la plus petite valeur qui la satisfait.

4.c - $\mathbb{P}(X_{11} = 3) = \dfrac{57002}{59049} \approx 0.965333875256$.

Références

[1] B.O. spécial n°8 du 13 octobre 2011. *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique*
`http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf`

[2] Pierre Lapôtre & Raymond Moché *Le problème du collectionneur/Collection de 3 objets*, activité.
`http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSSpecialiteMaths7.htm`

[3] Pierre Lapôtre & Raymond Moché *Le problème du collectionneur/Collection de N objets*, activité, Spécialité Mathématiques de la classe de TS
`http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSSpecialiteMaths7.htm`