Le problème du collectionneur

Collection de trois objets
Fiche Élève

TS

Chaque semaine, la petite Anna reçoit une tablette de chocolat Cébon. Chaque tablette contient un autocollant représentant soit une étoile, soit un cœur, soit un trèfle à quatre feuilles. Anna collectionne ces autocollants.

En supposant que les trois sortes d'autocollants sont équiréparties, combien Anna doit-elle recevoir de tablettes de chocolat pour être sûre d'obtenir la collection complète d'autocollants avec une probabilité d'au moins 0.95 ?

Première partie : modélisation du problème

Recevoir une tablette de chocolat et regarder quelle sorte d'autocollant elle contient revient à choisir un nombre au hasard dans l'ensemble $\{1, 2, 3\}$. On utilisera les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ égales respectivement au nombre de chiffres distincts obtenus à l'issue du 1[er] tirage, du 2[e] tirage, *etc.*

1 - Quelles sont les valeurs prises par les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, X_4, $\ldots$?

2 - On suppose que $\mathbb{P}\left(X_n = i\right) > 0$. Expliquer pourquoi il est normal de donner à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=i)}\left(X_{n+1} = j\right)$ la valeur suivante :

- si $1 \leqslant i < 3$,

$$\mathbb{P}_{(X_n=i)}\left(X_{n+1} = j\right) = \begin{cases} \frac{i}{3} & \text{si } j = i \\ \\ \frac{3-i}{3} & \text{si } j = i+1 \\ \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{1}$$

- si $i = 3$,

$$\mathbb{P}_{(X_n=3)}\left(X_{n+1} = j\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 3 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2}$$

On admettra, ce qui, intuitivement, est évident, que si X_n prend une valeur, celle-ci est prise avec probabilité > 0.

Deuxième partie : loi de X_n

3 - On pose $x_n = \mathbb{P}(X_n = 1), y_n = \mathbb{P}(X_n = 2), z_n = \mathbb{P}(X_n = 3)$. $L_n = (x_n, y_n, z_n)$ est donc la loi de X_n.

3.a - Préciser les valeurs de x_1, y_1, z_1, z_2 ; calculer x_2, en déduire y_2 ; calculer x_3 et z_3, en déduire y_3.

3.b - À partir de la réunion d'événements deux à deux disjoints

$$(X_n = j) = (X_n = j, X_{n-1} = 1) \cup (X_n = j, X_{n-1} = 2) \cup (X_n = j, X_{n-1} = 3) \tag{3}$$

démontrer que les suites (x_n), (y_n) et (z_n) vérifient les égalités :

$$\forall n \geqslant 2, \quad x_n = \frac{1}{3} \cdot x_{n-1}, \quad y_n = \frac{2}{3} \cdot x_{n-1} + \frac{2}{3} \cdot y_{n-1}, \quad z_n = \frac{1}{3} \cdot y_{n-1} + z_{n-1} \tag{4}$$

Indications :

- d'après la question **3.a**, les relations (4) sont satisfaites pour $n = 2$ et $n = 3$. Il suffit de les établir pour $n \geqslant 4$,

- partant de (3), utiliser l'additivité de la probabilité et les probabilités conditionnelles.

3.c - Donner, pour $n \geqslant 1$, l'expression de x_n en fonction de n.

3.d - Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $y_n = \dfrac{2^n - 2}{3^{n-1}}$.

3.e - En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

3.f - Quelles sont les limites respectives des suites $(x_n), (y_n)$ et (z_n) ?

3.g - On appelle E l'événement : « On achète indéfiniment des tablettes de chocolat et on n'obtient jamais les 3 autocollants ». Comparer les événements E et $(X_n < 3)$. En déduire que $P(E) = 0$. Qu'est-ce que cela signifie ?

Troisième partie : calcul de la solution

4.a - Exprimer le problème posé à l'aide de la suite $(z_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$.

4.b - Trouver le plus petit nombre n_{min} de tablettes de chocolat qu'Anna doit recevoir pour obtenir la collection complète avec une probabilité au moins égale à 0.95.

4.c - Combien vaut exactement cette probabilité ?