Le problème du collectionneur

Collection de deux objets
Fiche Professeur

TS

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

But de l'activité : Modéliser le problème - aléatoire - du collectionneur, s'intéresser au nombre de coups qu'il faut jouer pour obtenir la collection complète des deux objets avec une probabilité d'au moins 0.99, résoudre ce problème.
Compétences engagées : On observera la répétition d'épreuves identiques et indépendantes. Des suites numériques interviendront dans la détermination de la loi de la variable aléatoire X_n.
Mots-clefs : Modélisation, probabilités conditionnelles, la somme des probabilités vaut 1, suites récurrentes, suites croissantes et majorées, inéquations.
Documents utiles à télécharger :
✓ Fiche Élève (pdf)
✓ Fiche Professeur (pdf)
Matériel utilisé : Calculatrice ou ordinateur équipé d'un logiciel de calcul.
Durée indicative : La fiche Élève peut être donnée comme travail à préparer à la maison. Dans ce cas, moins d'une heure devrait suffire.
Solution et commentaires :

Première partie : modélisation du problème

1. - X_1 ne prend que la valeur 1. X_2, $X_3, \ldots$ prennent les valeurs 1 et 2. En effet, si $n \geqslant 2$, X_n vaut 1 si on a tiré le même chiffre au cours des n premiers tirages, la valeur 2 sinon.

2. - Ce qui suit est une affaire de bon sens.
• $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1) = \dfrac{1}{2}$ car si on a toujours obtenu le même chiffre au cours des n premiers tirages, la probabilité d'avoir encore ce chiffre au tirage suivant (pour que X_{n+1} prenne la valeur 1) est la probabilité de le tirer quand on tire un nombre au hasard dans $\{1, 2\}$.
• $\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2) = \dfrac{1}{2}$ car si on a toujours obtenu le même chiffre au cours des n premiers tirages, la probabilité d'avoir l'autre chiffre au tirage suivant (pour que X_{n+1} prenne la valeur 2) est la probabilité de tirer cet autre chiffre quand on tire un nombre au hasard dans $\{1, 2\}$.
• $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1) = \dfrac{\mathbb{P}\left((X_n=2)\cap(X_{n+1}=1)\right)}{\mathbb{P}(X_n=2)} = \dfrac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(X_n=2)} = 0.$
• $\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2) = \dfrac{\mathbb{P}\left((X_n=2)\cap(X_{n+1}=2)\right)}{\mathbb{P}(X_n=2)} = 1$ car $(X_n=2)\cap(X_{n+1}=1) = (X_n=2)$ puisque $(X_n=2) \subseteq (X_{n+1}=2)$.

Deuxième partie : loi de X_n

3.a - $x_1 = \mathbb{P}(X_1=1) = 1$ et $y_1 = \mathbb{P}(X_1=2) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3.b -
• Cas $n=1$: $x_2 = \mathbb{P}(X_2=1)$ est la somme des probabilités pour que l'on tire 1 aux 2 premiers coups et que l'on tire 2 aux 2 premiers coups, soit

$$x_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot x_1$$

$y_2 = \mathbb{P}(X_2 = 2)$ est la somme des probabilités pour que l'on tire 1 puis 2 aux 2 premiers coups et que l'on tire 2 puis 1 aux 2 premiers coups, soit

$$y_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot x_1 + y_1$$

• Cas $n \geqslant 2$:

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) \times \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) \times \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1)$$

ce qui donne :

$$x_{n+1} = x_n \times \frac{1}{2} + y_n \times 0 = x_n \times \frac{1}{2}$$

et

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 2) = \mathbb{P}(X_n = 1) \times \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 2) \times \mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 2)$$

ce qui donne

$$y_{n+1} = x_n \times \frac{1}{2} + y_n \times 1 = x_n \times \frac{1}{2} + y_n$$

Remarque : Le cas $n = 1$ est un cas particulier car on ne peut pas conditionner par l'événement $(X_1 = 2)$, qui est de probabilité 0.

3.c - La suite (x_n) étant une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $x_1 = 1$, on en déduit que $x_n = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot$ Sachant que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $x_n + y_n = 1$, on obtient $y_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot$

3.d - Autre solution : on observe la répétition d'épreuves identiques et indépendantes. L'événement $(X_n = 1)$ est réalisé lorsqu'on a obtenu n fois 1 ou n fois 2, c'est-à-dire

$$(X_n = 1) = ((T_1 = 1) \cap \cdots \cap (T_n = 1)) \cup ((T_1 = 2) \cap \cdots \cap (T_n = 2))$$

Comme $\mathbb{P}\left((T_1 = 1) \cap \cdots \cap (T_n = 1)\right) = \mathbb{P}\left((T_1 = 2) \cap \cdots \cap (T_n = 2)\right) = \frac{1}{2^n}$, il en résulte que $\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot$ De $\mathbb{P}\left(X_n = 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_n = 1\right)$, on déduit que $\mathbb{P}\left(X_n = 2\right) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot$

En conclusion : $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ et $y_n = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \cdot$

Remarques : On aurait pu traiter la question **2** en partant de la suite (T_n) qui est une suite de variables indépendantes ne prenant chacune que les valeurs 1 et 2 avec la probabilité $\frac{1}{2} \cdot$ La suite (X_n) se définit à partir de la suite (T_n) par

$$X_n = \operatorname{Card}\left(T_1,\, \ldots,\, T_n\right)$$

On a préféré mettre directement l'accent (sans le dire) sur la suite (X_n) qui est une chaîne de Markov d'espace des états $\{1, 2\}$, de loi initiale $(1, 0)$ et de matrice de transition

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.e - $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 1$.

3.f - Il est clair que $E \subseteq (X_n = 1)$, donc $P\left(E\right) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$ quel que soit $n \geqslant 1$, ce qui prouve, en passant à la limite, que $P\left(E\right) = 0$. Cela veut dire que *sûrement*, si on achète indéfiniment des paquets de bonbons, viendra un moment où on aura les deux figurines. On ne peut préciser ce que sera ce moment. Il est aléatoire (il varie quand on répète l'expérience d'acheter indéfiniment des paquets de bonbons).

Troisième partie : calcul de la solution

4.a - Le problème posé revient alors à résoudre l'inéquation : $y_n \geqslant 0.99$ soit $1 - \frac{1}{2^{n-1}} \geqslant 0.99$.

4.b - Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $y_{n+1} - y_n = \frac{1}{2} \cdot x_n = \frac{1}{2^n} > 0$. Cela montre que la suite (y_n) est croissante. Comme $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, tous les termes de la suite (y_n) sont donc $\geqslant 0.99$ à partir d'un certain rang. On détermine ce rang en résolvant l'inéquation $1 - \frac{1}{2^{n-1}} \geqslant 0.99$ ou $2^{n-1} \geqslant 100$. On obtient alors, sans calculatrice, que $n = 8$ puisque $64 = 2^6 < 100 < 2^7 = 128$.

4.c - Dans les conditions indiquées, la probabilité, en achetant 8 paquets de bonbons, d'obtenir les deux figurines sera : $\mathbb{P}\left(X_8 = 2\right) = 1 - \frac{1}{2^7} = \frac{127}{128}$.

Quatrième partie : pour aller plus loin

$\mathbb{P}(T_i = 1) = \frac{2}{3}, \mathbb{P}(T_i = 2) = \frac{1}{3}$ conduit à $\mathbb{P}(X_n = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n + 1}{3^n}$ et $\mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - \frac{2^n + 1}{3^n}$. En calculant les premiers termes de la suite (y_n) avec une calculatrice ou un logiciel de calcul, on trouve alors qu'il faut acheter 12 paquets de bonbons pour être sûr d'obtenir Alice et Alex avec une probabilité d'au moins 99%. Plus précisément,

$$\mathbb{P}(X_{12} = 2) = \frac{527344}{531441} \approx 0.99227.$$

Remarque - Le même sujet a été rédigé pour la classe de 1ère S, voir [2], sans utiliser de probabilités conditionnelles, se limitant en effet à l'« autre solution » de la question **3.d**. Pour la Spécialité Mathématiques de la classe de TS, nous avons repris ce problème avec une collection de 3 objets (belle intervention de suites récurrentes), puis de 101 objets (en fait un nombre quelconque d'objets, trop difficile à ce niveau), voir [3] et [4].

Références

[1] B.O. SPÉCIAL N°8 DU 13 OCTOBRE 2011. *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique* `http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf`

[2] PIERRE LAPÔTRE & RAYMOND MOCHÉ *Le problème du collectionneur Collection de 2 objets* (1S) `http://gradus-ad-mathematicam.fr/PremiereProbatStat2.htm`

[3] PIERRE LAPÔTRE & RAYMOND MOCHÉ *Le problème du collectionneur/Collection de 3 objets*, activité. `http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSSpecialiteMaths7.htm`

[4] PIERRE LAPÔTRE & RAYMOND MOCHÉ *Le problème du collectionneur/Collection de 101 départements*, activité. `http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSSpecialiteMaths7.htm`