Le problème du collectionneur

Collection de deux objets

Fiche Élève

TS

Alice et Alex sont les deux mascottes du fabricant de bonbons Toutesorte.
Chaque paquet de bonbons Toutesorte contient une figurine à collectionner ; l'une représente Alice, l'autre représente Alex.
En supposant que les deux types de figurines sont équirépartis dans les paquets de bonbons mis en vente, combien faut-il en acheter pour être sûr d'obtenir Alice et Alex avec une probabilité d'au moins 99%.

Première partie : modélisation du problème

Ouvrir un paquet de bonbons et découvrir quelle figurine il contient revient à choisir un nombre au hasard dans l'ensemble $\{1, 2\}$. On utilisera les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$ égales respectivement au nombre de chiffres distincts obtenus à l'issue du 1$^{\text{er}}$ tirage, du 2$^{\text{e}}$ tirage, *etc.*

1 - Quelles sont les valeurs prises par $X_1, X_2, X_3, \ldots$ respectivement ?

2 - Pour i et j prenant les valeurs 1 et 2, si $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$, quelle valeur donnera-t-on à la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_n=i)}(X_{n+1} = j)$?

Deuxième partie : loi de X_n

3 - On pose $x_n = \mathbb{P}(X_n = 1), y_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$. $L_n = (x_n, y_n)$ est donc la loi de X_n.

3.a - Préciser les valeurs de x_1 et y_1.

3.b - Démontrer que les suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ vérifient les égalités suivantes :

$$x_{n+1} = x_n \times \left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad y_{n+1} = x_n \times \left(\frac{1}{2}\right) + y_n$$

3.c - En déduire, pour $n \in \mathbf{N}^*$, les expressions de x_n et y_n en fonction de n.

3.d - *Autre solution* : T_i désignant la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si 1 est tiré au $i^{\text{ème}}$ coup, la valeur 2 sinon, comparer les événements $(X_n = 1)$, $(T_1 = 1) \cap \cdots \cap (T_n = 1)$ et $(T_1 = 2) \cap \cdots \cap (T_n = 2)$. Combien vaut $\mathbb{P}\left((T_1 = 1) \cap \cdots \cap (T_n = 1)\right)$? En déduire successivement $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$, c'est-à-dire x_n et y_n.

3.e - Quelles sont les limites respectives des suites (x_n) et (y_n) ?

3.f - On appelle E l'événement : « On achète indéfiniment des paquets de bonbons et on obtient toujours la même figurine ». Comparer les événements E et $(X_n = 1)$. En déduire que $P(E) = 0$. Qu'est-ce que cela signifie ?

Troisième partie : calcul de la solution

4.a - Exprimer le problème posé à l'aide de la suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

4.b - Démonter que la suite (y_n) est croissante. Trouver le plus petit nombre n de paquets de bonbons à acquérir pour avoir les figurines d'Alice et d'Alex avec une probabilité au moins égale à 99%.

4.c - Combien vaut exactement cette probabilité ?

Quatrième partie : pour aller plus loin

On suppose maintenant que le fabricant de bonbons a reçu deux fois plus de figurines Alex que de figurines Alice. Cette proportion se retrouve dans les paquets de bonbons mis en vente.

5 - Combien faut-il acheter de paquets de bonbons pour être sûr d'obtenir Alice et Alex avec une probabilité d'au moins 99% ?