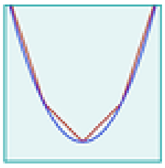


Somme de valeurs absolues

$1^{\text{ère}}$S

Fiche Professeur

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

But de l'activité : Appliquer la définition et les propriétés de la valeur absolue dans un problème. Découvrir un résultat étonnant qui sera l'occasion de revoir la fonction polynôme du second degré.

Compétences engagées :
- ✓ Calculs sur les valeurs absolues.
- ✓ Calculs sur le second degré.

Matériel utilisé :
- ✓ papier, crayon
- ✓ ordinateur avec imprimante pour les représentations graphiques
- ✓ calculatrice (non indispensable)

Durée indicative : 1 heure

Pré-requis :
- ✓ Connaître la fonction valeur absolue.
- ✓ Connaître la fonction polynôme du second degré.
- ✓ Nombre dérivé.
- ✓ Tangente à une courbe en un point.

Nom du logiciel utilisé : tout logiciel permettant de tracer une courbe

Déroulement de la séance : La fiche Élève peut être donnée comme travail à faire à la maison.
Solution :

1. L'expression de φ sans les barres de valeurs absolues est fournie ci-dessous :
$$\begin{aligned}
0 \leqslant x \leqslant 1, \quad \varphi(x) &= -5x+15\\
1 \leqslant x \leqslant 2, \quad \varphi(x) &= -3x+13\\
2 \leqslant x \leqslant 3, \quad \varphi(x) &= -x+9\\
3 \leqslant x \leqslant 4, \quad \varphi(x) &= x+3\\
4 \leqslant x \leqslant 5, \quad \varphi(x) &= 3x-5\\
5 \leqslant x \leqslant 6, \quad \varphi(x) &= 5x-15
\end{aligned}$$
Commentaire hors programme : il s'agit bien d'une fonction continue par morceaux.
2. Pour tout $x \in [0\,;6]$,
$$\begin{aligned}
\varphi(6-x) &= |6-x-1|+|6-x-2|+|6-x-3|+|6-x-4|+|6-x-5|\\
&= |5-x|+|4-x|+|3-x|+|2-x|+|1-x|\\
&= \varphi(x)
\end{aligned}$$
puisque pour tout $a \in \mathbf{R}, \quad |-a| = |a|$.
3. Pour tout $x \in [0\,;6]$, le milieu I du segment $[MM']$ a pour coordonnées $(3;\varphi(x))$. Ce point est situé sur la droite d'équation $x = 3$ qui constitue alors un axe de symétrie de la courbe $\mathscr{C}$
4. **a.** Le tableau de variations de φ sur $[0\,;6]$:

x	0		3		6
$\varphi(x)$	15	↘	6	↗	15

b. Le tableau de variations fournit la réponse : le minimum de φ sur $[0\,;6]$ est 6, il est atteint en 3.

c. L'hypothèse sur le minimum conduit à poser $P(x) = a(x-3)^2 + 6$ où a, réel > 0, est déterminé avec la condition $P(0) = \varphi(0)$. On trouve $a = 1$ et $P(x) = (x-3)^2 + 6$, soit encore $P(x) = x^2 - 6x + 15$.

5. La table de valeurs de P et de φ :

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	15	10	7	6	7	10	15
$\varphi(x)$	15	10	7	6	7	10	15

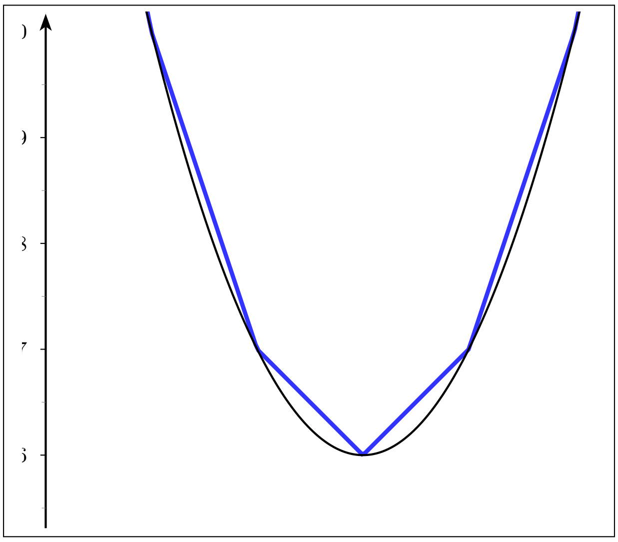
Le tableau donne les coordonnées de points communs à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{P}$. Il ne peut y en avoir d'autres. En effet, sur chacun des intervalles $[0\,;1], \ldots, [5\,;6]$, l'équation du second degré $\varphi(x) = P(x)$ a au plus deux solutions. Comme on en connaît déjà deux, on les connaît toutes.

6. La table de valeurs de P' :

x	$0,5$	$1,5$	$2,5$	$3,5$	$4,5$	$5,5$
$P'(x)$	-5	-3	-1	1	3	5

Ainsi, sur chaque intervalle $[n, n+1]$, n entier naturel entre 0 et 5, la tangente à $\mathscr{P}$ au point d'abscisse le milieu de cet intervalle est parallèle à la restriction de φ à cet intervalle. Ce qui permet de vérifier ici une propriété des cordes d'une parabole.

7. Voici les courbes obtenues avec GeoGebra :



Pour aller plus loin :

On a vu que l'on cherche l'équation de la parabole sous la forme $y = a(x-3)^2 + b$, $a > 0$. Écrire que le minimum en 3 est 6 donne $b = 6$, puis écrire que la parabole passe par le point $(0, 15)$ donne $a = 1$. Finalement, on trouve $P(x) = (x-3)^2 + 6 = x^2 - 6x + 15$. Ce qui est curieux, c'est que la parabole passe par tous les sommets de la ligne brisée. Pourquoi ?

Remarquons qu'on peut la rechercher sous la forme $P(x) = ax^2 + bx + c$ en lui imposant le passage par les 3 premiers sommets de la ligne brisée (les points $(0, 15)$, $(1, 10)$ et $(2, 7)$). Ainsi, si une parabole passe par ces 3 premiers sommets, elle passe par tous les autres. C'est une propriété de différences secondes.

Les différences premières $d_P(i)$ de P (ses accroissements) vérifient

$$\text{pour } i = 1, \ldots, 6, \qquad d_P(i) = P(i) - P(i-1) = 2i - 5$$

Ses différences secondes $\delta_P(i)$ (différence premières des différences premières) sont égales à

$$\text{pour } i = 2, \ldots, 6, \qquad \delta_P(i) = P(i) - 2P(i-1) + P(i-2) = d_P(i) - d_P(i-1) = 2$$

Les différences secondes de φ calculées aux mêmes points étant manifestement égales à 2, on en déduit que

$$\text{pour } i = 2, \ldots, 6, \qquad P(i) = 2P(i-1) - P(i-2) + 2 \quad \text{et} \quad \varphi(i) = 2\varphi(i-1) - \varphi(i-2) + 2$$

Les égalités $P(0) = \varphi(0)$, $P(1) = \varphi(1)$ et $P(2) = \varphi(2)$ entraînent donc toutes les autres.

Ceci est susceptible de généralisation. Nous nous contenterons de l'algorithme « scilab » suivant qui à tout vecteur ligne $[a_1, \ldots, a_n]$ tel que $a_1 < \cdots < a_n$ associe le graphe de la fonction

$$\varphi(x) = |x - a_1|, + \cdots + |x - a_n|$$

sur l'intervalle $[a_1\,,\,a_n]$.

```
function y=somvalabs(A)
    y=[];
    for i=1:size(A,'c')
        y=[y,sum(abs(A(1,i)-A))];
    end
endfunction
A=input('A=');
clf;
plot(A',somvalabs(A)');
```

On pourra constater après quelques essais que le cas traité est très particulier. On remarquera aussi que les graphes obtenus sont toujours des lignes brisées convexes, la pente d'un segment étant la pente du segment précédent augmentée de 2.