Le problème du collectionneur

Collection de deux objets
Fiche Professeur

1S

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

But de l'activité : Modéliser le problème - aléatoire - du collectionneur, s'intéresser au nombre de coups qu'il faut jouer pour obtenir la collection complète des deux objets avec une probabilité d'au moins 0.99, résoudre ce problème.

Compétences engagées : On observera la répétition d'épreuves identiques et indépendantes. Des suites numériques interviendront dans la détermination de la loi de la variable aléatoire X_n.

Mots-clefs : Modélisation, la somme des probabilités vaut 1, suites numériques, suites convergentes, inéquations.

Documents utiles à télécharger :
✓ Fiche Élève (pdf)
✓ Fiche Professeur (pdf)
Matériel utilisé : Calculatrice ou ordinateur équipé d'un logiciel de calcul.

Durée indicative : La fiche Élève peut être donnée comme travail à préparer à la maison. Dans ce cas moins, d'une heure devrait suffire.

Solution et commentaires :

Première partie : modélisation du problème

1 - X_1 ne prend que la valeur 1. $X_2, X_3, \ldots$ prennent les valeurs 1 et 2. En effet, si $n \geqslant 2$, X_n vaut 1 si on a tiré le même chiffre au cours des n premiers tirages, la valeur 2 sinon.

Deuxième partie : loi de X_n

2.a - $x_1 = \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$ et $y_1 = \mathbb{P}(X_1 = 2) = 0$.
2.b - On observe la répétition d'épreuves identiques et indépendantes. L'événement $(X_n = 1)$ est réalisé lorsqu'on a obtenu n fois 1 ou n fois 2, c'est-à-dire

$$(X_n = 1) = ((T_1 = 1) \cap \cdots \cap (T_n = 1)) \cup ((T_1 = 2) \cap \cdots \cap (T_n = 2))$$

Comme $\mathbb{P}\left((T_1 = 1) \cap \cdots \cap (T_n = 1)\right) = \mathbb{P}\left((T_1 = 2) \cap \cdots \cap (T_n = 2)\right) = \dfrac{1}{2^n}$, il en résulte que $\mathbb{P}\left(X_n = 1\right) = \dfrac{1}{2^{n-1}}\cdot$ De $\mathbb{P}\left(X_n = 2\right) = 1 - \mathbb{P}\left(X_n = 1\right)$, on déduit que $\mathbb{P}\left(X_n = 2\right) = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\cdot$
En conclusion : $x_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et $y_n = 1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\cdot$
2.c - $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 1$.

2.d - Il est clair que $E \subseteq (X_n = 1)$, donc $P\left(E\right) \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ quel que soit $n \geqslant 1$, ce qui prouve, en passant à la limite, que $P\left(E\right) = 0$. Cela veut dire que *sûrement*, si on achète indéfiniment des paquets de bonbons, viendra un moment où on aura les deux figurines. On ne peut préciser ce que sera ce moment. Il est aléatoire (il varie quand on répète l'expérience d'acheter indéfiniment des paquets de bonbons).

Troisième partie : calcul de la solution

3.a - Il s'agit de trouver le plus petit entier n tel que $y_n \geqslant 0.99$.

3.b - Il est évident que (x_n) est décroissante, donc (y_n) croît. Le problème posé revient alors à résoudre l'inéquation : $1 - \dfrac{1}{2^{n-1}} \geqslant 0.99$ ou $2^{n-1} \geqslant 100$. Cela se fait de tête. L'inégalité est vérifiée à partir de 8 achats.

3.c - $\mathbb{P}\left(X_8 = 2\right) = 1 - \dfrac{1}{2^7} = \dfrac{127}{128}$.

Quatrième partie : pour aller plus loin

4 - Les égalités $\mathbb{P}(T_i = 1) = \dfrac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(T_i = 2) = \dfrac{1}{3}$ conduisent à

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{2^n + 1}{3^n} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - \frac{2^n + 1}{3^n}.$$

En calculant les premières valeurs de $\mathbb{P}\left(X_n = 2\right)$ à la calculatrice ou avec un logiciel de calcul, on trouve qu'à partir de $n = 12$, $\mathbb{P}(X_n = 2) \geqslant 0.99$.

Références

[1] *Programme de mathématiques, cycle terminal de la série scientifique, classe de Première*
`http://media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf`