



Le problème du collectionneur

Collection de deux objets
Fiche Élève

1S

Alice et Alex sont les deux mascottes du fabricant de bonbons Toutesorte. Chaque paquet de bonbons Toutesorte contient une figurine à collectionner ; l'une représente Alice, l'autre représente Alex. En supposant que les deux types de figurines sont équirépartis dans les paquets de bonbons mis en vente, combien faut-il en acheter pour être sûr d'obtenir Alice et Alex avec une probabilité d'au moins 99%.

Première partie : modélisation du problème

Ouvrir un paquet de bonbons et découvrir quelle figurine il contient revient à choisir un nombre au hasard dans l'ensemble $\{1, 2\}$. On utilisera les variables aléatoires X_1, X_2, \dots égales respectivement au nombre de chiffres distincts obtenus à l'issue du 1^{er} tirage, du 2^e tirage, *etc.*

1 - Quelles sont les valeurs prises par les variables aléatoires X_1, X_2, X_3, \dots ?

Deuxième partie : loi de X_n

2 - On pose $x_n = \mathbb{P}(X_n = 1), y_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$. $L_n = (x_n, y_n)$ est donc la loi de X_n .

2.a - Préciser les valeurs de x_1 et y_1 .

2.b - T_i désignant la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si 1 est tiré au $i^{\text{ème}}$ coup, la valeur 2 sinon, comparer les événements

$$(X_n = 1), (T_1 = 1) \cap \dots \cap (T_n = 1) \text{ et } (T_1 = 2) \cap \dots \cap (T_n = 2)$$

- Combien vaut $\mathbb{P}((T_1 = 1) \cap \dots \cap (T_n = 1))$?

- En déduire successivement $\mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\mathbb{P}(X_n = 2)$, c'est-à-dire x_n et y_n .

2.c - Quelles sont les limites respectives des suites (x_n) et (y_n) ?

2.d - On appelle E l'événement : « On achète indéfiniment des paquets de bonbons et on obtient toujours la même figurine ». Comparer les événements E et $(X_n = 1)$. En déduire que $P(E) = 0$. Qu'est-ce que cela signifie ?

Troisième partie : calcul de la solution

3.a - Exprimer le problème posé à l'aide de la suite (y_n) .

3.b - Démontrer que la suite (y_n) est croissante. Trouver le plus petit nombre n de paquets de bonbons à acquérir pour avoir les figurines d'Alice et d'Alex avec une probabilité au moins égale à 99%.

3.c - Combien vaut exactement cette probabilité ?

Quatrième partie : pour aller plus loin

On suppose maintenant que le fabricant de bonbons a reçu deux fois plus de figurines Alex que de figurines Alice. Cette proportion se retrouve dans les paquets de bonbons mis en vente.

4 - Combien faut-il alors acheter au moins de paquets de bonbons pour être sûr d'obtenir Alice et Alex avec une probabilité d'au moins 99% ?

