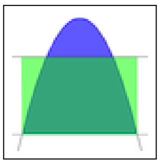


Arche de parabole

Fiche Professeur

TS

Auteur : Pierre Lapôtre

But de l'activité : Calcul formel : faire une démonstration avec « Xcas », quadrature de la parabole.

Niveau de difficulté de l'activité : Normal ; la formule de la quadrature de l'arc de parabole est établie dans un cas particulier très simple. De plus, on dispose de l'intégrale définie, ce qui n'était pas le cas d'Archimède ! Le script « Xcas » utilisé est donné dans l'énoncé.

Mots-clefs : Calcul formel, démonstration, « Xcas », intégrale définie, valeur moyenne d'une fonction, parabole.

Compétences engagées :
✓ Calcul algébrique
✓ Calcul intégral

Pré-requis :
✓ Trinôme du second degré (1S)
✓ Identités remarquables
✓ Primitives usuelles (fonction polynôme)

Matériel et logiciel utilisés : Ordinateur équipé de « Xcas ».
Durée indicative : 1/2 heure pour la partie informatique, 1/2 heure pour la partie algébrique.
Documents utiles à télécharger :
✓ Fiche Élève (pdf)
✓ Archimède (cas, texte « Xcas »).

Déroulement de la séance :

La fiche a été distribuée aux élèves pour préparation à la maison.
Des élèves volontaires proposent leur correction de la première partie de l'activité.
Le professeur intervient pour apporter les précisions nécessaires.
Les élèves (peu expérimentés dans l'utilisation de Xcas) testent les commandes successives indiquées dans l'énoncé. Des variantes sont possibles, par exemple, qu'obtient-on si on omet un "simplify" ?

Solution :

1. Les formules donnant la somme et le produit des solutions (réelles ou complexes) de l'équation du second degré sont utiles. Elles s'établissent sans aucune difficulté. Celle de la différence des solutions est moins connue. Elle est tout aussi simple à vérifier.

L'hypothèse $a < 0$, assure que $-\dfrac{\Delta}{a} > 0$ d'où $q - p > 0$ soit $q > p$.

2.1 La fonction f est une fonction polynôme donc, d'après le cours, elle est continue sur $\mathbf{R}$. En particulier sur l'intervalle $[p\,;q]$.
Comme p et q sont les racines de ce trinôme et $a < 0$, on sait que f est positive sur $[p\,;q]$.

2.2 Les hypothèses et les résultats de cours sur le trinôme du second degré vus en 1S montrent que f présente en $-\dfrac{b}{2a}$ un maximum égal à $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2.3 Résultat vu en 1S : $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$.

3. $\mathscr{A}$ est l'aire sous la courbe d'une fonction continue positive sur $[p\,;q]$. C'est la définition de l'intégrale vue en cours.

4. Dans cette question, on utilisera les égalités suivantes :

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq, \qquad q^3-p^3=(q-p)(q^2+pq+p^2)$$

$$\begin{aligned}
\int_p^q (ax^2+bx+c)\mathrm{d}x &= \left[a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\right]_p^q \\
&= \frac{a}{3}(q^3-p^3)+\frac{b}{2}(q^2-p^2)+c(q-p) \\
&= (q-p)\left(\frac{a}{3}(q^2+pq+p^2)+\frac{b}{2}(p+q)+c\right) \\
&= (q-p)\left(\frac{a}{3}((p+q)^2-pq)+\frac{b}{2}(p+q)+c\right) \\
&= -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left(\frac{a}{3}\left(\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{c}{a}\right)+\frac{b}{2}\left(-\frac{b}{a}\right)+c\right) \\
&= -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left(\frac{a}{3}\left(\frac{b^2-ac}{a^2}\right)-\frac{b^2}{2a}+c\right) \\
&= -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left(\frac{2b^2-2ac-3b^2+6ac}{6a}\right) \\
&= -\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\left(\frac{-b^2+4ac}{6a}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\Delta}.\Delta}{6a^2}
\end{aligned}$$

En utilisant la formule d'Archimède, la base valant $q-p$ et la hauteur $-\dfrac{\Delta}{4a}$, on obtient bien

$$\begin{aligned}
\mathscr{A} &= \frac{2}{3}\times(q-p)\times-\frac{\Delta}{4a} \\
&= \frac{2}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right)\times\left(-\frac{\Delta}{4a}\right) \\
&= \frac{\sqrt{\Delta}.\Delta}{6a^2}
\end{aligned}$$

5. Par définition de la valeur moyenne : $\mu=\dfrac{1}{q-p}\displaystyle\int_p^q f(x)\mathrm{d}x$ soit

$$\begin{aligned}
\mu &= -\frac{a}{\sqrt{\Delta}}\times\frac{\sqrt{\Delta}.\Delta}{6a^2} \\
&= \frac{2}{3}\left(-\frac{\Delta}{4a}\right) \\
&= \frac{2}{3}f\left(\frac{-b}{2a}\right)
\end{aligned}$$

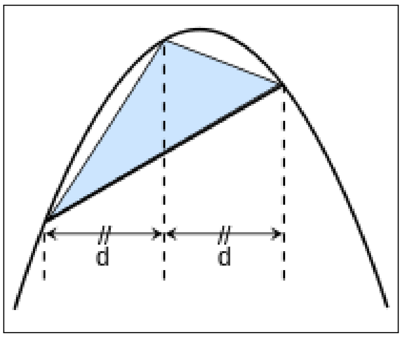
Voir le logo de l'activité.

6. Le calcul formel permet de reprendre ces calculs.

Pour aller plus loin :

✓ Cette activité présente un cas particulier du problème plus général de la quadrature de la parabole résolu par Archimède, voir [1] :

✓ Le dessin et le commentaire qui suivent sont extraits de [1] :



« Archimède inscrit un triangle particulier dans le segment de parabole. L'aire du segment de parabole est égale aux 4/3 de l'aire de ce triangle ».

✓ **Rappel : Aire d'un triangle** ABC : dans le plan rapporté à un repère orthonormé, si les coordonnées de A, B et C sont données par (x_A, y_A), (x_B, y_B) et (x_C, y_C), on peut calculer son aire S à l'aide de l'une ou l'autre des formules :

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \left| (x_B - x_A)(y_C - y_A) - (x_C - x_A)(y_B - y_A) \right| \\ \text{ou} & \\ S &= \frac{1}{2} \cdot \left| x_A y_C - x_A y_B + x_B y_A - x_B y_C + x_C y_B - x_C y_A \right| \end{aligned}$$

voir [2].

✓ Ces formules permettent de démontrer la formule de la quadrature de la parabole d'Archimède dans le cas général, à l'aide de $Xcas$, à savoir que l'aire de l'arche de parabole est égale à l'aire du triangle multipliée par $\frac{4}{3}$.

Références

[1] Wikipedia. *La quadrature de la parabole d'Archimède*
http://fr.wikipedia.org/wiki/La_quadrature_de_la_parabole_d%27Archimède

[2] Wikipedia. *Aire du triangle*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Aire_du_triangle