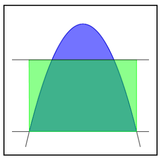

Arche de parabole

Fiche Élève

TS

On considère la fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des réels donnés, avec $a < 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de ce trinôme et on suppose que $\Delta > 0$. On pose

$$p = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad q = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

1. Établir les égalités suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcll} p+q &=& -\dfrac{b}{a} & (1) \\ p \times q &=& \dfrac{c}{a} & (2) \\ q-p &=& -\dfrac{\sqrt{\Delta}}{a} & (3) \end{array}\right.$$

Déduire de (3) et des hypothèses que $p < q$.

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, soit $\mathscr{P}$ la courbe représentative de f sur $[p\,;q]$.

2.1 Vérifier que f est continue, positive sur $[p\,;q]$.

2.2 $\mathscr{P}$ est appelée *arche de parabole.* Pourquoi sa hauteur est-elle égale à $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$.

2.3 Vérifier que $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}\cdot$

Archimède a démontré que l'aire $\mathscr{A}$ de la surface sous l'arche de parabole est égale aux deux tiers de la base par la hauteur de l'arche. Ce problème est appelé *quadrature de l'arc de parabole.* Notre but est de vérifier la formule d'Archimède, d'abord par un calcul à la main, puis à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

3. Justifier l'égalité $\mathscr{A} = \displaystyle\int_p^q f(x)\mathrm{d}x$.

4. Montrer, en calculant l'intégrale de la question **3**, que $\mathscr{A} = \dfrac{\Delta\sqrt{\Delta}}{6a^2}$; retrouver la formule d'Archimède.

5. Quelle est la valeur moyenne de f sur $[p\,;q]$? Interpréter géométriquement cette valeur moyenne.

6. Commenter l'espace de travail Xcas reproduit ci-dessous :

$\boxed{1}$ `f(x) :=a*x**2+b*x+c`

// Interprete f

// Attention : a,b,c, declaree(s) comme variable(s) globale(s) compiling f

$$\texttt{(x)->a*x\^{}2+b*x+c} \qquad (1)$$

$\boxed{2}$ `[p,q] :=solve(f(x)=0,x)`

$$[\frac{1}{2a}(-b+\sqrt{-4ac+b^2}), \frac{1}{2a}(-b-\left(\sqrt{-4ac+b^2}\right))] \qquad (2)$$

$\boxed{3}$ `simplify(p+q)`

$$\frac{-b}{a} \tag{3}$$

$\boxed{4}$ `simplify(p*q)`

$$\frac{c}{a} \tag{4}$$

$\boxed{5}$ `simplify(q-p)`

$$\frac{-\left(\sqrt{-4ac+b^2}\right)}{a} \tag{5}$$

$\boxed{6}$ `factor(simplify(int(f(x),x,p,q)))`

$$\frac{(-4ac+b^2)\sqrt{-4ac+b^2}}{6a^2} \tag{6}$$

$\boxed{7}$ `factor(simplify((2*(q-p)*f(-b/(2*a))/3)))`

$$\frac{(-4ac+b^2)\sqrt{-4ac+b^2}}{6a^2} \tag{7}$$