3%

Intérêts composés

TS

Fiche Professeur

Auteurs : Jean-Marc Duquesnoy, Pierre Lapôtre, Raymond Moché

But de l'activité : Analyse et algorithmique : suites géométriques, fonction logarithme népérien et fonction racine $n^{\text{ième}}$ utilisées dans un cas concret.
Niveau de difficulté de l'activité : Normal.
Mots-clefs : Suites géométriques, logarithme népérien, racine $n^{\text{ième}}$, résolution graphique d'une inéquation, algorithmique : instruction conditionnelle, comprendre et exécuter un algorithme, tracer un graphe.
Matériels utilisés : Calculatrice ou logiciel de calcul. Un algorithme « scilab » est donné.
Durée indicative : Une à deux heures.
Noms des logiciels utilisés : « scilab » ou tout autre logiciel de calcul.
Documents utiles à télécharger :

- ✓ « Fiche Élève » (pdf),
- ✓ « Graphe » (sce = « scilab »).

Déroulement de la séance : L'activité peut se traiter avec une calculatrice (auquel cas la séance peut se dérouler dans la salle de classe) ou avec un logiciel de calcul numérique. Dans ce dernier cas, si on utilise « scilab », on peut télécharger le fichier « Graphe » fourni, en salle informatique. Le professeur peut aussi se contenter de montrer et d'exécuter cet algorithme en classe à l'aide d'un vidéoprojecteur. Enfin, si l'activité a été préparée par les élèves, une heure suffit.
Solution :

1.a - $C_2 = C_0 \cdot (1+i)^2$.

1.b - $C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$. (C_n) est une suite géométrique de raison $(1+i)$.

2.a - $2 \cdot C_0 = C_0 \cdot (1+i)^n \iff 2 = (1+i)^n$

2.b - De l'équation précédente, on déduit : $\ln 2 = n \times \ln 1.03$ soit $n = \dfrac{\ln 2}{\ln 1.03}$ c'est-à-dire $n \approx 23.45$. Il faut donc 24 ans pour doubler le capital.

2.c - L'équation qui exprime que le capital a triplé est : $3 = (1.03)^n$, celle qui indique le quadruplement est : $4 = (1.03)^n$. Elles ont respectivement pour solutions : $n = \dfrac{\ln 3}{\ln 1.03}$ et $n = \dfrac{\ln 4}{\ln 1.03}$, soit respectivement $n \approx 37.17$ et $n \approx 46.90$. Le capital initial triple en 38 ans et quadruple en 47 ans.

2.d - Il y a quadruplement quand il y a un doublement suivi d'un autre doublement. On a effectivement $\dfrac{\ln 4}{\ln 1.03} = 2 \times \dfrac{\ln 2}{\ln 1.03}$. On trouve 47 ans et non $2 \times 24 = 48$ ans car on compte en années, ce qui provoque un décalage.

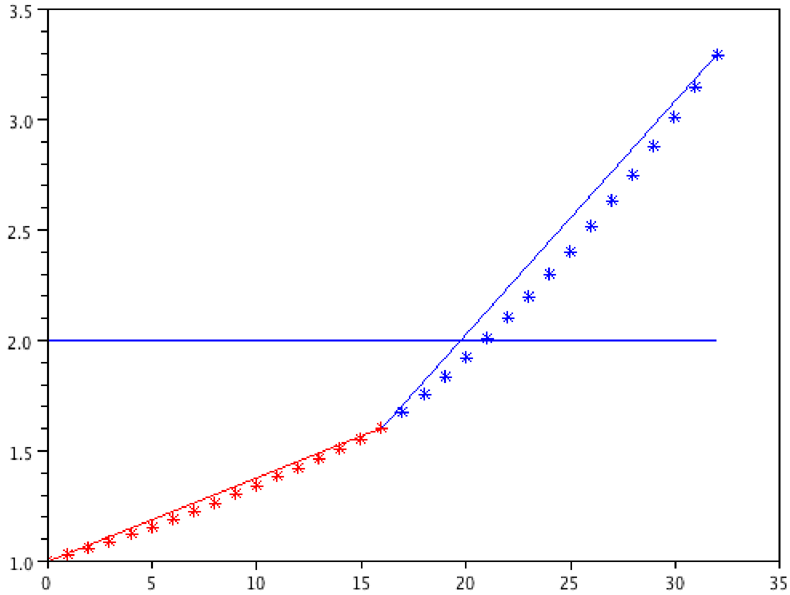
3 - Au bout de 16 ans le capital est $C_{16} = C_0 \cdot (1.03)^{16}$, au bout de 32 ans le capital devient $C_{32} = C_{16} \cdot (1.046)^{16}$ soit $C_{32} = C_0 \cdot (1.03)^{16} \cdot (1.046)^{16}$.
L'équation d'inconnue m qui exprime le doublement du capital est : $2 \cdot C_0 = C_0 \cdot (1.03)^{16} \cdot (1.046)^m$, qui a pour solution $m = \dfrac{\ln 2 - 16 \cdot \ln 1.03}{\ln 1.046}$ soit $m \approx 4.90$. Ainsi, le capital a doublé en 21 ans.

4.a - Le graphique représente les points demandés ainsi que les segments M_0M_{16}, $M_{16}M_{32}$ et la parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée 2. Cet algorithme est plutôt compact, donc un peu difficile. Par exemple, les instructions

```
X=0:N;
Y=(1+i).^ X;
```

produisent la première le vecteur-ligne $[0, 1, \ldots, N]$, de dimension $N+1$, la seconde le vecteur-ligne $[(1+i)^0, (1+i)^1, \ldots, (1+i)^N]$, de même dimension.

4.b - On exécute l'algorithme « Graphe » et on obtient



On voit que le doublement est obtenu au bout de 21 ans.

5 - Soit à résoudre :

$$C_0(1+j)^{32} = C_0(1.03)^{16} \cdot (1.046)^{16}$$

c'est-à-dire

$$(1+j)^{32} = (1.03)^{16} \cdot (1.046)^{16}$$

il est possible de prendre les racines 32$^{\text{ième}}$ des deux membres. Ce qui donne :

$$(1+j) = (1.03)^{\frac{16}{32}} \cdot (1.046)^{\frac{16}{32}}$$

c'est-à-dire

$$(1+j) = (1.03)^{\frac{1}{2}} \cdot (1.046)^{\frac{1}{2}}$$

finalement

$$j = \sqrt{1.03 \times 1.046} - 1 \approx 0.038.$$