

# Intérêts composés

Fiche Élève

TS

Auteurs : J-MD, PL, RM

Un épargnant place une partie  $C_0$  de son avoir exprimé en euros à un taux d'intérêt de  $i\%$ .  $C_0$  est son capital initial, pour ce placement. À la fin de la première année, son nouveau capital sera  $C_1 = C_0(1 + i)$ . Ce nouveau capital rapportera des intérêts la deuxième année et ainsi de suite. Tous les intérêts perçus rapportent donc eux-mêmes des intérêts les années suivantes. C'est ce qu'on appelle des *intérêts composés*.

On a remarqué que, pour simplifier, on n'envisage que des placements en années. Il en résulte que notre unité de temps est l'année.

**1.a** - De quel capital  $C_2$  disposera-t-il à la fin de la deuxième année ?

**1.b** - De quel capital  $C_n$  disposera-t-il à la fin de la  $n^{\text{ième}}$  année ? ( $C_n$ ) est une suite. Quelle est sa nature ?

**2** - On suppose que l'argent est placé à 3 %.

**2.a** - On se pose alors la question suivante : combien d'années devra-t-il attendre s'il veut doubler son capital ?

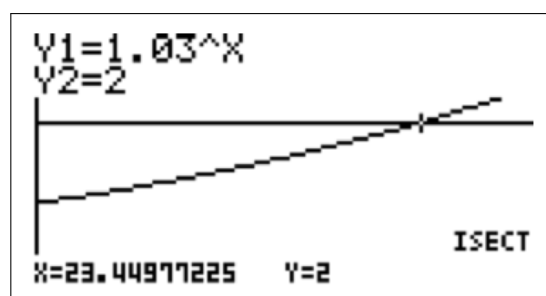
Écrire l'équation d'inconnue  $n$  qui exprime que le capital acquis est le double du capital initial.

**2.b** - Résoudre cette équation en donnant la valeur exacte de la solution (en années dans le système décimal) puis, répondre à la question posée.

*Remarque* : La calculatrice ou un logiciel de calcul permettent de retrouver le résultat graphiquement. Les copies d'écran suivantes indiquent la réponse apportée par une CASIO 35+ :

```
Graph Func :Y=
Y1=1.03^X
Y2=2
Y3:
Y4:
Y5:
Y6:
[SEL] [DEL] [TYPE] [MEM] [DRAW]
```

```
View Window
Xmin :0
max :30
scale:1
Ymin :0
max :3
scale:1
[INIT] [TRIG] [STD] [STO] [RCL]
```



**2.c** - Écrire les équations d'inconnue  $n$  qui expriment que le capital acquis est le triple, puis le quadruple du capital initial. Résoudre ces équations en donnant les valeurs exactes des solutions, puis répondre aux questions :  
combien d'années devra-t-il attendre s'il veut tripler son capital ? Quadrupler son capital ?

**2.d** - Comparer les durées de doublement et de quadruplement ; expliquer.

**3** - Par contrat, il était prévu que le taux d'intérêt serait revu selon les conditions du marché. Ainsi, au bout de 16 ans, le taux d'intérêt est porté à 4,6%. Quel est son capital  $C_{32}$  au bout de 32 ans, en fonction de  $C_0$  ? Écrire, puis résoudre, l'équation qui exprime que le capital acquis est le double du capital initial.

**4.a** - Dans les calculs, le capital initial  $C_0$  apparaît comme un simple coefficient de proportionnalité. Pour juger le rendement du placement, on peut supposer que  $C_0 = 1$ . On désire représenter graphiquement les points de coordonnées  $(0, C_0), (1, C_1), \dots, (32, C_{32})$ . Que produit l'algorithme « scilab » ci-dessous ?

Listing 1 – Graphe

```
// Le taux est i% pendant les N premières années ,  
// ibis% pendant les Nbis suivantes .  
clear ;  
clf ;  
i=input ( ' i=' );  
N=input ( ' N=' );  
ibis=input ( ' ibis=' );  
Nbis=input ( ' Nbis=' );  
X=0:N;  
Y=(1+i).^ X;  
plot (X,Y, " r*" );  
plot ([0 ,N] , [1 ,Y(N+1)] , " r " );  
Xbis=1:Nbis ;  
Ybis=Y(N+1)*(1+ibis).^ Xbis ;  
plot (20+Xbis , Ybis , " b*" );  
plot ([N,N+Nbis] , [Y(N+1),Ybis ( Nbis )] , " b" );  
plot ([0 ,N+Nbis] , [2 ,2] );
```

**4.b** - Retrouver graphiquement la durée de doublement du capital en années à l'aide de l'algorithme ci-dessus ou à la calculatrice.

*Indication* : En cas de doute, on peut grossir la partie concernée du graphe.

**5** - Établir que le taux d'intérêt  $j$ , constant pendant ces 32 ans, qui aurait produit le capital  $C_{32}, C_0$  étant inchangé, est donné par :

$$j = \sqrt{1.03} \cdot \sqrt{1.046} - 1$$

