Trois suites convergentes

Fiche Professeur TS

Auteur : Pierre Lapôtre

But de l'activité : Calcul des premiers termes de 3 suites qui semblent converger, plus ou moins vite, vers la même limite. La convergence de l'une d'elles vers le nombre d'or est étudiée précisément : on démontre que l'écart entre le terme général de cette suite et le nombre d'or tend vers 0 au moins à la vitesse de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

Niveau de difficulté de l'activité : Normal

Mots-clefs :
- ✓ Suites : définition par récurrence, suite décroissante, minorée, convergence.
- ✓ Fonctions : sens de variation, continuité, théorème des valeurs intermédiaires.
- ✓ Algorithmique : boucle « pour ».

Compétences engagées :
- ✓ raisonnement par récurrence.
- ✓ majorations, minorations.

Pré-requis :
- ✓ connaître le principe du raisonnement par récurrence
- ✓ connaître le cours sur les suites numériques,
- ✓ étude de suites récurrentes à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel de calcul.

Matériels utilisés :
- ✓ calculatrice programmable
- ✓ ordinateur avec scilab

Durée indicative : 1 heure (+ préparation)

Documents utiles à télécharger :
- ✓ fiche élève

Déroulement de la séance : énoncé préparé à la maison + 1 heure en salle informatique.

Partie A.

1. Les théorèmes admis, sur la continuité des fonctions usuelles, permettent de conclure quant à la continuité des trois fonctions proposées sur $[1\ ,\ +\infty[$.
   De manière évidente, pour $x \geqslant 1$, on a $f(x) \geqslant 1$ et $g(x) \geqslant 1$. Comme $h(1) = 2$, si l'on suppose qu'il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que $h(x_0) < 1$ alors, le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins un x_1 vérifiant $1 \leqslant x_1 \leqslant x_0$ tel que $h(x_1) = 1$. Or cette dernière équation n'a pas de racine réelle, ce qui contredit l'hypothèse et prouve que $h(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in [1\ ,\ +\infty[$.
   Par récurrence immédiate, les termes initiaux sont égaux à 2, donc plus grands que 1. Si $u_n \geqslant 1$ resp $v_n \geqslant 1$ et $w_n \geqslant 1$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 1$ resp $v_{n+1} = g(v_n) \geqslant 1$ et $w_{n+1} = h(w_n) \geqslant 1$ d'après le résultat précédent. Ce qui montre que ces suites sont effectivement bien définies pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2. **Utilisation de Scilab**

```
u(1)=2;v(1)=2;w(1)=2;
for n=1:20
u(n+1)=1+1/u(n);v(n+1)=sqrt(1+v(n));w(n+1)=(w(n)^2+1)/(2*w(n)-1);
L(n,1)=n;L(n,2)=u(n);L(n,3)=v(n);L(n,4)=w(n);
end;
format('v',12);
disp(L)
```

On pourra préférer cet autre programme plus dans l'esprit de scilab (sauf erreur, le programme précédent fait intervenir 143 variables, le suivant 4).

```
u=2;v=2;w=2;L=[1,u,v,w];
for n=1:19
  u=1+1/u;v=sqrt(1+v);w=(w^2+1)/(2*w-1);
  L=[L;[n+1,u,v,w]];
end;
format('v',12);
disp(L)
```

1.	2.	2.	2.
2.	1.5	1.732050808	1.666666667
3.	1.666666667	1.65289165	1.619047619
4.	1.6	1.628769981	1.618034448
5.	1.625	1.621348198	1.618033989
6.	1.615384615	1.619057812	1.618033989
7.	1.619047619	1.618350337	1.618033989
8.	1.617647059	1.618131743	1.618033989
9.	1.618181818	1.618064196	1.618033989
10.	1.617977528	1.618043323	1.618033989
11.	1.618055556	1.618036873	1.618033989
12.	1.618025751	1.61803488	1.618033989
13.	1.618037135	1.618034264	1.618033989
14.	1.618032787	1.618034074	1.618033989
15.	1.618034448	1.618034015	1.618033989
16.	1.618033813	1.618033997	1.618033989
17.	1.618034056	1.618033991	1.618033989
18.	1.618033963	1.61803399	1.618033989
19.	1.618033999	1.618033989	1.618033989
20.	1.618033985	1.618033989	1.618033989

3. En regardant le tableau ci-dessus, on constate que les rangs demandés sont respectivement 11, 9 et 4. Il semble que ces trois suites convergent vers un même nombre dont une approximation décimale est 1.618 ; il semble aussi que (w_n) converge plus vite que (v_n) qui converge plus vite que (u_n).

4. On reconnait le nombre d'or et les relations qu'il vérifie.

Partie B.

1. • Pour $n = 1$: $\varphi \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant 2$ est vérifié car $v_2 = \sqrt{3}$ et $v_1 = 2$.
   • Si l'on suppose que pour $n \in \mathbf{N}^*$, $\varphi \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2$ alors, la fonction g étant croissante dans l'intervalle $[1\,,\,+\infty[$, on en déduit que $g(\varphi) \leqslant g(v_{n+1}) \leqslant g(v_n) \leqslant g(2) = \sqrt{3} \leqslant 2$, soit $\varphi \leqslant v_{n+2} \leqslant v_{n+1} \leqslant 2$.
   • Ainsi, la propriété est vraie au rang 1, elle est héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

2. Il en résulte que (v_n) est une suite décroissante et bornée. On sait que (théorème admis) toute suite décroissante et minorée est convergente, donc la suite (v_n) est convergente.

3. φ étant un minorant de (v_n) l'inégalité $0 \leqslant v_{n+1} - \varphi$ est acquise.
   D'autre part, $v_{n+1} - \varphi = \sqrt{v_n + 1} - \varphi = \dfrac{v_n + 1 - \varphi^2}{\sqrt{v_n + 1} + \varphi} = \dfrac{v_n - \varphi}{\sqrt{v_n + 1} + \varphi}$.
   En minorant le dénominateur par 2φ, lui-même minoré par 3, on obtient l'inégalité demandée.

4. L'encadrement précédent et un raisonnement par récurrence permettent d'établir ce résultat.

5. $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ est une suite géométrique dont la raison en valeur absolue est strictement inférieure à 1. Elle converge donc vers 0. Le théorème des gendarmes permet de conclure sur la convergence de (v_n) vers φ.
6. $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\,033\,988\,749\,9$. D'après la question précédente, pour avoir $|v_n - \varphi| \leqslant 10^{-8}$, il suffit que $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \leqslant 10^{-8}$, ce qui donne $n \geqslant 18$. Cela ne prouve pas que $n_0 = 18$, mais seulement que $n_0 \leqslant 18$.

   En fait, le tableau de la question 2 de la Partie A et l'inégalité $0 \leqslant v_{n+1} - \varphi \leqslant \frac{1}{3}(v_n - \varphi)$, valable pour tout entier $n \in \mathbf{N}^*$, montrent que $n_0 = 16$.
7. Le tableau déjà cité indique clairement que la suite (w_n) semble converger beaucoup plus rapidement vers φ, puisque, à chaque itération, le nombre de décimales exactes est doublé.

Variantes / Pour aller plus loin :

✓ On peut s'intéresser plus particulièrement à la suite (u_n). φ désigne toujours la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$u_{n+1} - \varphi \text{ et } u_n - \varphi \text{ sont de signes contraires.}$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$|u_{n+1} - \varphi| \leqslant \frac{2}{3} \cdot |u_n - \varphi|$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$|u_n - \varphi| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

✓ On peut aussi s'intéresser plus particulièrement à la suite (w_n). φ désigne toujours la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

1. Démontrer, par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :

$$\varphi \leqslant w_{n+1} \leqslant w_n \leqslant 2$$

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$0 \leqslant w_{n+1} - \varphi \leqslant \frac{(w_n - \varphi)^2}{2}$$

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$0 \leqslant w_{n+1} - \varphi \leqslant \frac{(2-\varphi)^{2^n}}{2^{2^n - 1}}$$