# Trois suites convergentes

TS

**Fiche Élève**

Auteur : PL

**Partie A.**

On considère les fonctions $f, g$ et $h$, définies sur $[1, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} \qquad g(x) = \sqrt{1+x} \qquad h(x) = \frac{x^2+1}{2x-1}$$

1. Vérifier que ces trois fonctions sont continues sur leur intervalle de définition, que l'image, par chacune de ces trois fonctions de $[1, +\infty[$, est incluse dans $[1, +\infty[$.
   En déduire alors que les suites numériques $(u_n), (v_n)$ et $(w_n)$ définies par la donnée de leurs premiers termes $u_1 = 2, v_1 = 2, w_1 = 2$ et les relations de récurrence :
   $$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \qquad v_{n+1} = \sqrt{1+v_n} \qquad w_{n+1} = \frac{w_n^2+1}{2w_n-1}$$
   sont effectivement bien définies pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
2. Donner, sous forme de tableau, les vingt premiers termes de ces suites. Ces termes seront écrits sous forme décimale avec 9 chiffres au moins après la virgule.
3. **a.** À partir de quel rang les termes de $(u_n)$, respectivement $(v_n)$, respectivement $(w_n)$ que l'on vient de calculer appartiennent-ils à l'intervalle $[1.618, 1.6181]$ ?

   **b.** Quelles conjectures peut-on formuler à propos de la convergence de ces suites ?
4. On note $\varphi$ la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Démontrer que $\varphi$ vérifie les relations suivantes :
   $$\varphi^2 = \varphi + 1 \qquad \varphi = 1 + \frac{1}{\varphi} \qquad \varphi = \sqrt{1+\varphi} \qquad \varphi = \frac{\varphi^2+1}{2\varphi-1}$$

**Partie B.**

Dans cette partie, on s'intéresse plus particulièrement à la suite $(v_n)$. $\varphi$ désigne toujours la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a :
   $$\varphi \leqslant v_{n+1} \leqslant v_n \leqslant 2$$
2. Que peut-on en déduire, concernant la suite $(v_n)$ ?
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   $$0 \leqslant v_{n+1} - \varphi \leqslant \frac{1}{3}(v_n - \varphi)$$
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,
   $$0 \leqslant v_n - \varphi \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
   Remarque : $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$· Elle tend très vite vers 0.
5. Quelle est la limite de la suite $(v_n)$ ?
6. **a.** Calculer $\varphi$, sous forme décimale.

   **b.** Déterminer le plus petit entier $n_0$ tel que $|v_{n_0} - \varphi| \leqslant 10^{-8}$.
7. On admet que les suites $(u_n)$ et $(w_n)$ convergent également vers $\varphi$. Laquelle de ces trois suites semble converger le plus rapidement vers ce nombre ?