Algorithme CORDIC

Fiche Professeur

TS

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

But de l'activité : Le problème date du début de l'ère des calculs programmés. Il fallait économiser à la fois le temps de calcul et l'occupation des mémoires. L'algorithme CORDIC traite le problème suivant : imaginons que l'on ait enregistré en mémoire du calculateur un certain nombre de valeurs ad hoc de la fonction ln. Peut-on en déduire d'autres valeurs (toutes ?) de cette fonction à l'aide d'un petit nombre d'opérations ? Il en reste un beau problème de cet algorithme.

Avertissement : Le problème proposé est très intéressant. Malheureusement, malgré de gros efforts de simplification, il reste trop difficile pour une classe de TS normale.

Niveau de difficulté de l'activité : Difficile, pour de très bons élèves.

Mots-clefs :

- ✓ *Suites :* suite croissante et majorée, suite géométrique, convergence
- ✓ *Fonctions :* continuité, fonction logarithme népérien, fonction logarithme décimal, fonction partie entière
- ✓ *Algorithmique :* calculatrice, logiciel de calcul numérique ou de calcul formel

Compétences engagées :

- ✓ notions d'algorithmique
- ✓ réaliser un programme, le tester, comparer les résultats obtenus

Pré-requis :

- ✓ connaître les propriétés de la fonction logarithme népérien
- ✓ connaître le cours sur les suites numériques

Matériels utilisés :

- ✓ calculatrice
- ✓ ordinateur

Durée indicative : 2 heures (?)

Noms du logiciel utilisé : des algorithmes « scilab » sont proposés en solution

Documents utiles à télécharger :

- ✓ fiche Élève
- ✓ trois algorithmes « scilab » : « CORDIC1 », « CORDIC2 », « Scientifique »

Déroulement de la séance :

Jusqu'à la question 5 comprise, l'activité peut se dérouler en classe et ne nécessite que des calculatrices programmables. La question 6 propose d'écrire un algorithme délicat. Bien sûr, le professeur peut donner cet algorithme - par exemple l'un des algorithmes CORDIC1 et CORDIC2 (scilab) proposés en téléchargement ci-dessous - et demander aux élèves de le comprendre et de le tester.

La fin du problème sur l'écriture scientifique des nombres réels > 0 ne présente pas de difficulté.

En s'arrêtant à la question **5** comprise, on enlève toute la partie algorithmique sans gâcher le sujet.

La partie III peut être transformée en exercice d'algorithmique indépendant.

Solution :

1 - La suite (a_n) est définie par $a_n = 1 + 10^{-n}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en déduit :

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 1.1, \quad a_2 = 1.01, \quad a_3 = 1.001\ldots$$

La suite (a_n) est décroissante. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 10^{-n} = 0$ (suite géométrique), $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1$

2.a & 2.b - Calculs

Pour $x = 4$,

n	α_n	$x_n = x_{n-1} \cdot \alpha_n$	k_n
1	2	8	0
2	1.1	8.8	1
3	1.1	9.68	1
4	1.01	9.7768	2

; pour $x = 1.2$,

n	α_n	$x_n = x_{n-1} \cdot \alpha_n$	k_n
1	2	2.4	0
2	2	4.8	0
3	2	9.6	0
4	1.01	9.696	2
5	1.01	9.79296	2
6	1.01	9.8908896	2
7	1.01	9.98978496	2
8	1.001	9.999788294	3

2.c - Il résulte des hypothèses que (x_n) est une suite à termes strictement positifs et que $\dfrac{x_n}{x_{n-1}} = \alpha_n$. Or $\alpha_n > 1$, donc la suite (x_n) est strictement croissante. Les hypothèses impliquent également que (x_n) est majorée par 10 puisque,

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}^*, \quad x_n = x_{n-1} \cdot \alpha_n < 10$$

Étant croissante et majorée, la suite (x_n) converge.

2.d - Le passage à la limite ne conserve que les inégalités au sens large. On peut seulement affirmer que $1 \leqslant l \leqslant 10$.

3.a - Comme $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$, $x_{n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$. Comme $l > 0$,

$$\alpha_n = \frac{x_n}{x_{n-1}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

On en déduit que

$$k_n = -\frac{\ln(\alpha_n - 1)}{\ln 10} \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

3.b - Cette double inégalité découle directement de la définition « α_n est le plus grand des nombres $a_0, a_1, \ldots$ tel que $x_{n-1} \cdot a_i < 10$ ».

3.c - En passant à la limite dans la double inégalité de la question précédente, comme $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$ et comme $k_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, on obtient $l \leqslant 10 \leqslant l$, donc $l = 10$. Revenons de nouveau à la double inégalité de la question **3.b**.

cas 1 : si $x_n(1 + 10^{-k_n}) < 10$, comme $x_n > x_{n-1}$, on est sûr que

$$x_n(1 + 10^{-k_n}) < 10 \leqslant x_n(1 + 10.10^{-k_n})$$

ce qui prouve que $k_n = k_{n+1}$.

cas 2 : si $x_n(1 + 10^{-k_n}) \geqslant 10$, nécessairement $k_{n+1} > k_n$.

La suite (k_n) est donc croissante (au sens large). Cette question est difficile.

4.a & 4.b - Les élèves ont peut-être déjà rencontré cette manipulation. Quand p est grand, $ln(x_p)$ est voisin de $\ln 10$, puisque $x_p \xrightarrow[p \to +\infty]{} 10$ (donc $\ln(x_p) \xrightarrow[p \to +\infty]{} \ln 10$ parce que la fonction ln est continue au point 10). Par conséquent, puisque $\ln(x_p) = \ln x + \sum_{i=1}^{i=p} \ln(\alpha_i)$, $\ln 10 - \sum_{i=1}^{i=p} \ln(\alpha_i)$ est une bonne approximation de $\ln x$.

5 - On obtient le tableau suivant :

n	α_n	$x_n = x_{n-1} \cdot \alpha_n$	$\ln(\alpha_n)$	$b_n = b_{n-1} - \ln(\alpha_n)$
0	× × × × × × × ××	$x_0 = 4.0913182$	× × × × × × × ××	2.302585093
1	2	8.1826364	0.6931471806	1.609437912
2	1.1	9.00090004	0.0953101798	1.544127732
3	1.1	9.900990044	0.0953101798	1.418817552
4	1.01	9.999999944	0.009950330853	1.408867221

On constate que la valeur de b_4 est une approximation de la valeur de $\ln 4.0913182$ fournie par la calculatrice à 10^{-8} près.

6 - Cette question est plutôt difficile. Voir les deux solutions qui sont proposées : ce sont des fichiers « scilab » commentés, très différents.

« CORDIC1 » compte les puissances de $a_1, \ldots, a_n$, après regroupement des facteurs égaux, dans la formule (6).

« CORDIC2 » suit fidèlement l'énoncé.

7 - $k \leqslant \log X < k+1 \Longrightarrow 10^k \leqslant X < 10^{k+1}$. $x = \dfrac{X}{10^k}$ appartient bien à l'intervalle $[1\,,\,10[$. La double inégalité $10^k \leqslant X < 10^{k+1}$, qui caractérise k, montre que l'on peut calculer k à l'aide d'une boucle « tant que »- voir l'algorithme « scilab »- « Scientifique »).

8 - $\ln 4091.3182 = 3 \cdot \ln 10 + \ln 4.0913182 = 8.3166225$.

Variantes/Pour aller plus loin :

- ✓ On a approché $\ln x$ à l'aide d'une suite strictement décroissante. Avec le même matériel, on aurait pu définir une suite strictement croissante de même limite, obtenant un encadrement de $\ln x$, donc un bon contrôle de l'erreur d'approximation.
- ✓ On peut utiliser à la place de la suite (a_n) n'importe quelle suite strictement décroissante de limite 1, moyennant quelques ajustements. Globalement, les démonstrations demeurent inchangées.

Références :

1 - B. Kokanosky et J.L. Lamard : Voyage au cœur de votre calculatrice, *dans* Bulletin de l'APMEP, n° 332 (février 1982).

2 - Bonnefond Gérard, Daviaud Daniel et Audigier Marie-Noëlle : Manuel de Mathématiques, Terminales C/E Information, Collection N. Dimathème (ISBN 2-278-03945-8) 1983, Éditions Didier.