Algorithme CORDIC TS

Fiche Élève

Auteurs : PL & RM

L'algorithme CORDIC pour COrdinate Rotation for DIgital Computer découvert à la fin des années cinquante aux États-Unis permet de calculer quasi-instantanément le logarithme népérien $\ln X$ de tout nombre réel strictement positif X à partir d'un petit nombre de valeurs pré-enregistrées de la fonction ln et à l'aide d'opérations élémentaires.

I - Justification de l'algorithme CORDIC

Dans cette partie, x désigne un nombre quelconque de l'intervalle $[1\ ,\ 10[$. On utilisera une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres définis par

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad a_n = 1 + 10^{-n} \tag{1}$$

1 - Écrire les premiers termes de cette suite. Quel est son sens de variation ? Converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

2 - *Suite* (x_n)
On vérifie facilement que l'on définit par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres de l'intervalle $[1\ ,\ 10[$ en posant

$$\begin{cases} x_0 = x \\ x_n = x_{n-1}\cdot\alpha_n \quad \text{où } \alpha_n \text{ est le plus grand des nombres } a_0,\ a_1,\ \ldots \text{ tel que } x_{n-1}\cdot a_i < 10 \end{cases} \tag{2}$$

2.a - Calculer $\alpha_1,\ x_1,\ \alpha_2,\ x_2,\ \alpha_3,\ x_3,\ \alpha_4,\ x_4$, lorsque $x = 4$.

2.b - Calculer $\alpha_1,\ x_1, \ldots,\ \alpha_8,\ x_8$, lorsque $x = 1.2$.

2.c - Démontrer que la suite (x_n) est croissante et majorée par 10. C'est donc une suite convergente.

2.d - On appelle l la limite de la suite (x_n). Peut-on affirmer que $1 \leqslant l < 10$? Sinon, corriger.

3 - *Suites* (α_n) *et* (k_n)
Pour tout entier $n \geqslant 1$, α_n est de la forme $1 + 10^{-k_n}$, ce qui définit l'entier k_n.

3.a - À partir de la relation de récurrence (2), démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1, \quad \text{puis que} \quad \lim_{n\to+\infty} k_n = +\infty \tag{3}$$

3.b - Justifier la double inégalité

$$\text{pour tout entier } n \geqslant 1, \qquad x_{n-1}(1 + 10^{-k_n}) < 10 \leqslant x_{n-1}(1 + 10.10^{-k_n}) \tag{4}$$

3.c - En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = 10 \quad \text{et que } (k_n) \text{ est une suite croissante} \tag{5}$$

4.a - Démontrer que

$$\text{pour tout entier } p \geqslant 1, \quad x_p = x_0\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_p \tag{6}$$

4.b - Justifier et commenter l'affirmation :

$$\boxed{\ln 10 - \sum_{i=1}^{i=p} \ln(\alpha_i) \text{ est une bonne approximation de } \ln x} \tag{7}$$

Commentaires - Justification de l'algorithme CORDIC :

- ✓ $\ln 10 - \sum_{i=1}^{i=p} \ln(\alpha_i)$ est le terme général d'une suite décroissante qui converge vers $\ln x$. L'algorithme CORDIC donne donc des approximations par excès. Elles sont d'autant meilleures que p est grand.
- ✓ Pour calculer une approximation de $\ln x$ à l'aide de (7), x appartenant à $[1\ ,\ 10[$, il suffit donc d'avoir en mémoire $\ln 10$, de déterminer $k_1, \ldots, k_p$, ce qui donnera $\ln(1+10^{-k_1}), \ldots, \ln(1+10^{-k_p})$, et d'avoir aussi mis en mémoire les nombres de la forme $\ln(1+10^{-i})$, $1 \leqslant i \leqslant k_p$.
- ✓ Il est possible de déterminer la précision avec laquelle le résultat est obtenu.

II - Mise en œuvre de l'algorithme CORDIC

5 - Supposons que $x = 4.0913182$ et $p = 4$. Pour calculer l'approximation de $\ln(4.0913182)$ donnée par (7), on pose

$$b_0 = \ln 10, \quad b_1 = b_0 - \ln \alpha_1, \quad b_2 = b_1 - \ln \alpha_2, \quad b_3 = b_2 - \ln \alpha_3, \quad b_4 = b_3 - \ln \alpha_4 \tag{8}$$

b_4 est la valeur approchée de $\ln(4.0913182)$ que nous voulons calculer. Compléter, à l'aide d'une calculatrice, le tableau suivant, qui constitue une disposition pratique de l'algorithme CORDIC.

n	α_n	$x_n = x_{n-1} \cdot \alpha_n$	$\ln(\alpha_n)$	$b_n = b_{n-1} - \ln(\alpha_n)$
0	$\times\times\times\times\times\times\times\times$	$x_0 = 4.0913182$	$\times\times\times\times\times\times\times\times$	2.302585093
1				
2				
3				
4				

Comparer b_4 à la valeur de $\ln(4.0913182)$ fournie par la calculatrice.

6 - *Algorithmique* : À l'aide d'un logiciel de calcul formel ou de calcul numérique, construire un programme permettant de calculer une approximation de $\ln(4.0913182)$, si possible la meilleure possible, à l'aide de l'algorithme CORDIC, lorsque sont pré-enregistrées les valeurs de $\ln 10$, $\ln 2$, $\ln(1+10^{-1})$, $\ldots$, $\ln(1+10^{-8})$.

III - Prolongement de l'algorithme CORDIC

Nous voulons maintenant calculer le logarithme népérien de tout nombre strictement positif.

7 - *Écriture scientifique d'un nombre strictement positif.*

Soit X un nombre réel strictement positif. On pose

$$k = [\log X] \quad (k \text{ est la partie entière du logarithme décimal de } X) \tag{9}$$

Démontrer que X peut s'écrire sous la forme

$$X = x.10^k \quad \text{où} \quad 1 \leqslant x < 10 \tag{10}$$

$x.10^k$ s'appelle l'*écriture scientifique* de X. Les relations (10) équivalent à

$$\ln X = \ln x + k.\ln 10 \quad \text{où} \quad 1 \leqslant x < 10 \tag{11}$$

Commentaires : on voit que pour calculer $\ln X$, il suffit de savoir calculer $\ln x$ pour tout nombre x de l'intervalle $[1\ ,\ 10[$, ce que l'on sait faire, et de calculer k. Pour cela, on écrira un algorithme qui n'utilise pas $\log X$, évidemment.

8 - Donner une valeur approchée de $\ln 4091.3182$ déduite de la question (**5**).