Simulation de la marche aléatoire d'une souris

TS

Fiche Professeur

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

Algorithmique et calcul des probabilités : Simuler une marche aléatoire partant d'un état donné et dont les probabilités de transition (ou la matrice de transition) sont connues (les expressions « probabilités de transition » et « matrice de transition » ne sont pas utilisées). Cela permet d'estimer la loi de l'état de la marche à l'instant n comme application de la loi des grands nombres.

Compétences engagées :
- ✓ savoir déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire,
- ✓ comprendre et analyser un algorithme donné,
- ✓ modifier un algorithme donné quand de nouvelles sorties sont requises,
- ✓ valider un algorithme simple.

Pré-requis :
- ✓ Connaître la notion de loi de probabilité d'une variable aléatoire.
- ✓ Connaître la notion de probabilité conditionnelle.
- ✓ Connaître la loi des grands nombres.
- ✓ Connaître la boucle « tant que », les instructions conditionnelles et la commande « plot » d'un logiciel de calcul comme « Scilab pour les lycées ».

Matériels et logiciels utilisés :
- ✓ La salle informatique.
- ✓ « Scilab pour les lycées ».

Durée indicative : 1 heure

Documents utiles à télécharger :
- ✓ Fiche Élève
- ✓ Les fichiers « Simulation » et « Fluctuations » (fichiers scilab : .sce)

Déroulement de la séance : Suivre la fiche Élève, en salle informatique.
Solutions et commentaires :
1 - C'est, en fait, élémentaire : si, par exemple, la souris se trouve à un certain moment dans la case 2, elle ira ensuite dans la case 1, 3 ou 4 au hasard, 1, 3 et 4 étant équiprobables. Une commande permet de choisir au hasard entre 0, 1 et 2 (plus généralement entre 3 entiers consécutifs) de manière équiprobable, à savoir la commande

```
tirage_entier(1,0,2)
```

Malheureusement, pour des entiers non consécutifs, il faut bricoler. On s'attend à ce que les élèves choisissent la solution suivante :

Listing 1 – source scilab

```
x=tirage_entier(1,0,2);
if x==0 then y=1;
elseif x==1 then y=3;
    else y=4;
end
```

L'exécution des instructions conditionnelles étant lente, on les a évitées en utilisant un polynôme qui prend successivement les valeurs 1, 3 et 4 quand la variable vaut 0, 1, 2 (polynôme d'interpolation). L'instruction 16 est technique : elle donne le nombre de i dans le vecteur L

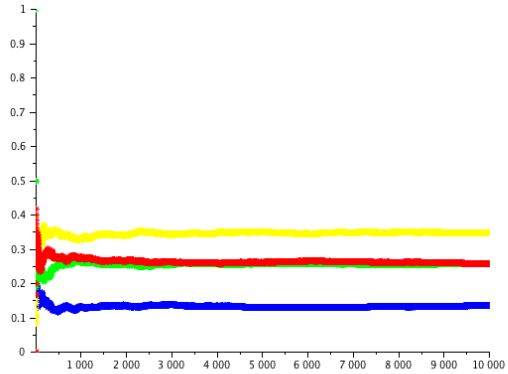
(utiliser l'aide en ligne pour la commande « find »). À la ligne 18, `K($)` désigne le dernier élément de la liste `K`. La ligne 20 n'est pas indispensable.

2 - On considère l'expérience aléatoire qui consiste à placer la souris dans la case 1 à l'instant initial (l'instant 0) et à regarder où elle se trouve à l'instant 10 (en fait, on *simulera* les 10 premiers déplacements de la souris). On va répéter cette expérience N fois et calculer la fréquence d'occupation de la case 1, c'est à dire la fréquence de réalisation de l'événement $(X = 1)$ au cours de ces N expériences. On fait de même pour la case 2, *etc.* Cela donne le programme « Fluctuations » directement issu du programme « Simulation » :

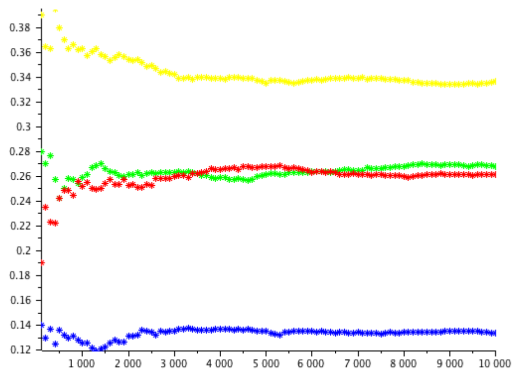
Listing 2 – Fluctuations

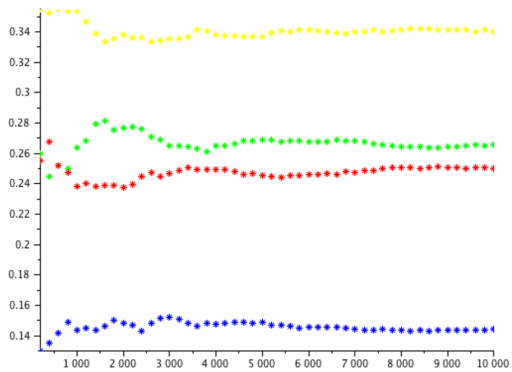
```
clear;
n=10;// On s'intéresse à la loi de X_n.
N=10000;//On répète N fois l'expérience.
C=[];
k=1;
while k<=N
    j=1;
    L=[1];
    while j<=n
        if L(j)==1 then y=2;
        elseif L(j)==2 then
            x=tirage_entier(1,0,2);
            y=-x^2/2+5*x/2+1;
        elseif L(j)==3 then
            x=tirage_entier(1,0,1);
            y=2*x+2;
        elseif L(j)==4 then
            x=tirage_entier(1,0,1);
            y=x+2;
        end;
        L=[L,y];
        j=j+1;
    end;
    C=[C,L(1,n+1)];
    F1(k)=frequence(1,C);
    F2(k)=frequence(2,C);
    F3(k)=frequence(3,C);
    F4(k)=frequence(4,C);
    k=k+1;
end
X=200:200:10000;// Pour avoir tous les points, faire X=1:10000.
clf
plot(X,F1(X),'b*',X,F2(X),'y*',X,F3(X),'g*',X,F4(X),'r*');
```

Si l'on veut afficher toutes les fréquences calculées, on obtient le graphe suivant :



On peut se contenter de moins de points, par exemple indiquer les fréquences de 100 en 100 à partir de la 100 ème expérience ou même de 200 en 200 à partir de la 200 ème, ce qui donne les graphes suivants [1] :





Le troisième graphe est bien suffisant.

3 - La loi de X est constituée par les probabilités $P(X=1)$, $P(X=2)$, $P(X=3)$ et $P(X=4)$ que nous désirons estimer. On sait que quand $N \longrightarrow +\infty$, la fréquence de réalisation de l'événement $(X=1)$ au cours des N expériences tend vers $P(X=1)$, d'après la loi des grands nombres. Si N est grand, on s'attend donc à avoir une bonne estimation de cette probabilité. On peut considérer que 10 000 est une « grande valeur » de N. Nous estimerons les probabilités demandées par les dernières fréquences calculées (afin de tenir compte de toute l'information expérimentale disponible). Comme elles sont peu lisibles sur les graphiques, nous afficherons ces valeurs à l'aide d'une instruction supplémentaire :

Listing 3 – source scilab

```
afficher('L''estimation proposee pour la loi de X est ')
afficher(F1($),F2($),F3($),F4($))
```

En fait, on peut calculer exactement la loi de X à l'aide du programme « Xcas » suivant [2] :

Listing 4 – source Xcas

```
L0:=[1,0,0,0];
T:=matrix([0,1,0,0],[1/3,0,1/3,1/3],[0,1/2,0,1/2],[0,1/2,1/2,0]);
L10=L0*T^(10);
```

1. Ces graphes proviennent de différentes simulations.
2. On trouvera une justification de ce programme dans [2].

On obtient la valeur exacte de la loi de X :

$$\left[\frac{2167}{15552},\frac{3563}{10368},\frac{16081}{62208},\frac{16081}{62208}\right] \approx [0.13933899, 0.34365355, 0.25850373, 0.25850373]$$

Sa valeur a été estimée à $[0.1492, 0.3385, 0.254, 0.2583]$ à partir d'une de nos simulations. Une autre simulation conduit à une autre valeur estimée : $[0.142, 0.343, 0.26, 0.255]$.

Références

[1] B.O. spécial n°8 du 13 octobre 2011. *Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique* http://media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf

[2] Pierre Lapôtre & Raymond Moché *Marche aléatoire d'une souris* http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSSpecialite6.htm

[3] Raymond Moché *Introduction aux chaînes de Markov* http://gradus-ad-mathematicam.fr/Exposes2.htm

[4] *Ressources pour la classe terminale générale et technologique Mathématiques Série S Enseignement de spécialité* http://media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/62/6/ressource_specialite_v5_210626.pdf

[5] Scilab : Aide pour Scilab pour les lycées : http://www.scilab.org/lycee/index_lycee.php?page=accueil#utilisation