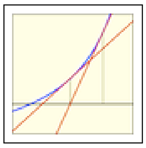


Algorithmique : méthode de Newton-Raphson

TS

Fiche Professeur

Auteurs : Pierre Lapôtre & Raymond Moché

Objet de l'activité : Un jeu d'hypothèses garantissant que la méthode de Newton-Raphson fonctionne est brièvement décrit. On étudie ensuite sa mise en œuvre algorithmique, très simple ; enfin, on exhibe aussi un cas où ça ne marche pas.
But de l'activité :
Appliquer le cours sur la dérivation, les équations de tangentes à une courbe, le sens de variations d'une fonction. Élaborer un algorithme, le modifier, le programmer.

Compétences engagées :
✓ Calculs sur les dérivées.
✓ Détermination de l'équation d'une tangente.
✓ Algorithmique, boucle Pour, boucle Tant que.
Matériel utilisé :
✓ papier, crayon.
✓ ordinateur ou/et calculatrice.
Durée indicative : 1 heure

Pré-requis :
✓ Connaître les bases de la programmation sur ordinateur ou calculatrice.
✓ Nombre dérivé.
✓ Tangente à une courbe en un point.
Nom du logiciel utilisé sur ordinateur : « scilab » ou « Xcas » ou calculatrice, « GeoGebra » est également utile.

Déroulement de la séance : La fiche Élève peut être donnée comme travail à préparer à la maison.

Une justification de la méthode de Newton-Raphson :

Théorème 1 *Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$, qui vérifie les hypothèses suivantes :*

- (h_1) il existe deux réels a et b tels que $\alpha < a < b < \beta$ et $f(a) \cdot f(b) < 0$;

- (h_2) f est dérivable dans l'intervalle I ; la fonction dérivée f' ne prend que des valeurs > 0 dans cet intervalle ;

-(h_3) f' est strictement croissante dans I ;

- (h_4) f' est continue dans I.

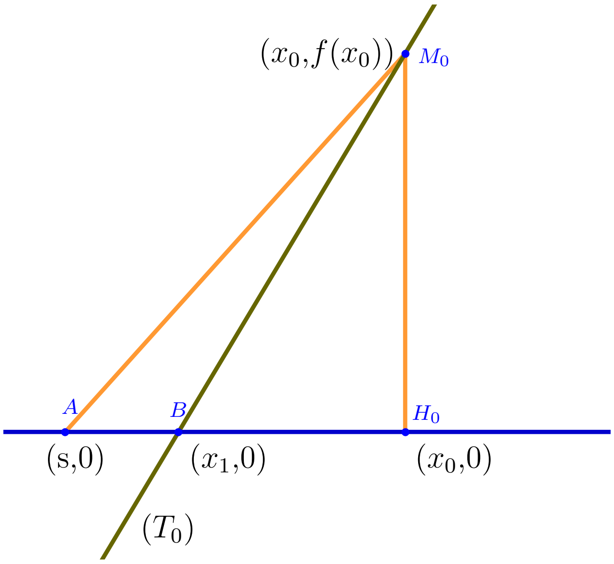
Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution et une seule s dans l'intervalle $[a, b]$. De plus, on définit par récurrence une suite (x_n) à partir de tout point x_0 de l'intervalle $]s, b]$ en posant $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$. Cette suite est strictement décroissante et converge vers s.

Démonstration - D'après (h_2), f est continue sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, d'après (h_1), f s'annule dans $]a, b[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

D'après (h_2), $f' > 0$ dans I. f y est donc strictement croissante. Comme $f(s) = 0$, on en déduit que dans I, f ne prend que des valeurs < 0 avant s et des valeurs > 0 après. N'importe quel point de l'intervalle $]s, b]$ peut être choisi comme point x_0. Comme s est inconnu, on peut choisir b ou tâtonner.

On a vu dans la solution ci-dessus que la tangente T_0 coupe l'axe des abscisses au point noté maintenant B d'abscisse $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Le point $(s; 0)$ est appelé A. Le problème est de démontrer que les points A, B et $H_0 = (x_0; 0)$ sont rangés dans cet ordre. C'est une propriété élémentaire de convexité du graphe. En effet, la pente du segment $[AM_0]$, égale à $\frac{f(x_0)}{x_0 - s} = \frac{f(x_0) - f(s)}{x_0 - s}$ est, d'après le théorème des accroissements finis, une valeur prise par la fonction f' dans l'intervalle $]s, x_0[$. Comme f' est strictement croissante dans I (hypothèse (h_3)), cette pente est strictement plus petite que la pente de la tangente (T_0). Comme enfin (H_0M_0) est perpendiculaire à l'axe des abscisses, les points A, B

et H_0 sont bien dans l'ordre indiqué. Il est résulte que la suite (x_n) se trouve dans l'intervalle $]s, b]$ et est strictement décroissante. En tant que suite décroissante et minorée, elle converge. Notons sa limite l. D'après l'hypothèse (h_4), la suite $(f'(x_n))$ converge vers $f'(l)$ et $f'(l) \neq 0$ (h_2). De même la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(l)$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient donc l'égalité $l = l - \frac{f(l)}{f'(l)}$, qui prouve que $f(l) = 0$ puis que $l = s$.



Solution et commentaires :
2.a - L'hypothèse (h_2) permet de conclure que f est continue sur $[a, b]$. On utilise ensuite (h_1) et le théorème des valeurs intermédiaires.

2.b - L'hypothèse $(h_2]$ permet de conclure que f est strictement croissante dans $[a, b)$. Elle prend donc des valeurs strictement négatives avant s, strictement positives après. Elle ne s'annule qu'en s.

3 - On peut choisir $x_0 = b$ ou se rapprocher de s par tâtonnement [1]. Avec le jeu d'hypothèses de l'énoncé, x_0 n'a pas besoin d'être proche de s, mais la vitesse de convergence n'est pas évaluée.

Voir ci-dessus la justification théorique de la méthode de Newton-Raphson (théorème 1).

3.a - $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ est une équation de la tangente au graphe de f au point M_0. Sa pente est > 0. Elle coupe donc l'axe des abscisses. En égalant y à 0, on obtient $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. D'après la figure ci-dessus, $s < x_1 < x_0 \leqslant b$. Dès lors, on peut faire jouer à x_1 le rôle de x_0 et ainsi de suite. On obtient une suite (x_n) définie par récurrence. Elle est contenue dans $]s, b]$ et est strictement décroissante.

3.b - Voici l'algorithme complété :

1. Dans la théorie exposée habituellement (cf. [1]), on a besoin de choisir x_0 suffisamment près de s. Et alors, on démontre que l'on a une vitesse de convergence quadratique, ce qui explique l'importance de la méthode de Newton-Raphson.

Algorithme : Méthode de Newton-Raphson
Entrées : x_0
Sorties : liste de dix nombres de plus en plus proches de s
Début du traitement des données :
Lire : x_0
s prend la valeur x_0
Pour k allant de 1 à 10
s prend la valeur $s - \dfrac{f(s)}{f'(s)}$
Afficher : s
FinPour
Fin du traitement des données

3.c - Il convient de remplacer la boucle **Pour** par une boucle **Tant que**

Algorithme : Méthode de Newton-Raphson
Entrées : x_0, p entier naturel non nul
Sorties : approximation de s à 10^{-p} près
Début du traitement des données :
Lire : x_0, p
s prend la valeur x_0
Tant que $\lvert f(s) \rvert > 10^{-p}$ faire
s prend la valeur $s - \dfrac{f(s)}{f'(s)}$
FinTant que
Afficher : s
Fin du traitement des données

4 - Programmes calculatrices (boucle Pour) :

Programme Casio	**Programme T.I.**
`====NEWTON====`	`PROGRAM :NEWTON`
`"X=" :?->X`↵	`:Input "X= ",X`
`{0}->List1`↵	`:ClrList L1`
`X->List1[1]`↵	`:X->L1(1)`
`For 1->K To 20`↵	`:For(K,1,20)`
`X-(X^5+5X-2)÷(5X^4+5)`	`:X-(X^5+5X-2)/(5X^4+5)`
`->X`	`:->X`
`X->List1[K+1]`↵	`:X->L1(K+1)`
`Next`↵	`:End`
`List1`▲	`:Disp L1`

Programmes calculatrices (boucle Tant que) :

Programme Casio	Programme T.I.
`====NEWTONWH====`	`PROGRAM :NEWTONWH`
`"X=" :?->X :"P=" :?->P↩`	`:Input "X= ",X`
`While Abs (X^ 5+5X-2)>1`	`:Input "P=",P`
`0^ (-P)↩`	`:While abs(X^ 5+5X-`
`X-(X^ 5+5X-2)÷(5X^ 4+5)`	`2)>10^ (-P)`
`->X↩`	`:X-(X^ 5+5X-2)/(5X`
`WhileEnd↩`	`^ 4+5)->X`
`X▲`	`:End`
	`:Disp X`

Pour les programmes « scilab » et « Xcas », voir les fichiers « for.sce » et « for.cas » d'une part, « while.sce » et « while.cas » d'autre part. On remarque qu'en partant de $x_0 = 10$, la convergence vers s est lente au début. Il peut être utile de calculer les 20 premiers termes de la suite (x_n) au lieu des 10 premiers.

5 -

a. Le point M_0 a pour coordonnées $(1; \sqrt[3]{0,5})$, $f'(1) = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}$ est le coefficient directeur de la tangente (T_0) car $f'(x) = \frac{1}{3}(x - 0,5)^{-\frac{2}{3}}$.
Ainsi $y = \frac{\sqrt[3]{4}}{3}(x-1) + \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ est l'équation réduite de (T_0).
La résolution de $y = 0$ donne $x_1 = -0,5$, abscisse du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses.

b. Le point M_1 a pour coordonnées $(-0,5; -1)$, le coefficient directeur de la tangente (T_1) est $f'(-0,5) = \frac{1}{3}$.
Ce qui donne $y = \frac{1}{3}(x + 0,5) - 1$ comme équation réduite de (T_1), puis $x_2 = 2,5$, abscisse du point d'intersection de (T_1) avec l'axe des abscisses.

c. Généralisation : $f(x_n) = (x_n - 0,5)^{\frac{1}{3}}$, $\quad f'(x_n) = \frac{1}{3}(x_n - 0,5)^{-\frac{2}{3}}$. On en déduit l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse x_n : $y = \frac{1}{3}(x_n - 0,5)^{-\frac{2}{3}}(x - x_n) + (x_n - 0,5)^{\frac{1}{3}}$, puis l'abscisse du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses :
$x_{n+1} = -2x_n + 1,5$ qui conduit à $x_{n+2} - x_{n+1} = -2(x_{n+1} - x_n)$
d'où, pour tout $n \geqslant 0$, $x_{n+1} - x_n = 3\cdot(-2)^{n-1}$, ce qui permet d'établir la divergence de cette suite.
La méthode de Newton-Raphson ne pouvait pas s'appliquer ici puisque la fonction proposée n'était pas dérivable en $0,5$.

d. Il semble intéressant d'exhiber ce cas, voir le fichier « hic.ggb » (« GeoGebra »).

Références

[1] WIKIPEDIA. *Méthode de Newton*
http://fr.wikipedia.org/wiki/Methode_de_Newton