Algorithmique : méthode de Newton-Raphson

TS

Fiche Élève

Auteurs : PL & RM

La méthode de Newton-Raphson permet d'approcher, avec toute la précision souhaitée, la solution d'une équation

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

lorsque certaines conditions sont vérifiées. Considérons le jeu d'hypothèses :

> La fonction f, définie sur un intervalle $I =]\alpha, \beta[$ vérifie les hypothèses suivantes :
>
> (h_1) il existe deux réels a et b tels que
>
> $$\alpha < a < b < \beta \quad \text{et} \quad f(a) \cdot f(b) < 0$$
>
> (h_2) f est dérivable dans l'intervalle I ; la fonction dérivée f' ne prend que des valeurs > 0 dans cet intervalle ;
>
> (h_3) f' est strictement croissante dans I ;
>
> (h_4) f' est continue dans I.

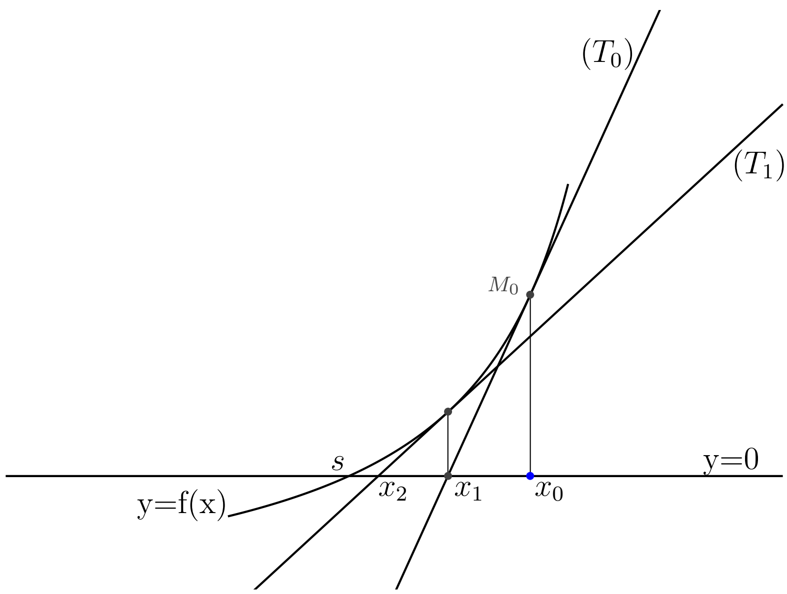
1 - Si l'on supposait que f vérifie seulement (h_1) et (h_2) et si l'on suppose de plus que la fonction f' est dérivable dans I, quelle condition suffirait-il d'imposer à la fonction f'' pour que les hypothèses (h_3) et (h_4) soient vérifiées par la fonction f ?

2 - On suppose que f vérifie les hypothèses (h_1), (h_2), (h_3) et (h_4).

2.a - Quelle hypothèse permet d'assurer que l'équation (1) a au moins une solution dans l'intervalle $]a, b[$?

2.b - Quelles hypothèses permet d'assurer que cette solution est unique ? Dans la suite, nous la noterons s. Le but du jeu est de calculer une valeur approchée de s.

3 - Soit x_0 un point de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. x_0 sera le point de départ du calcul. Il doit donc être <u>connu</u> alors que s est, en principe, inconnu. Les hypothèses imposent $s < x_0 \leqslant b$. Considérons le graphe suivant :



La méthode de Newton-Raphson consiste, à partir de x_0
- à construire la tangente (T_0) à la courbe de f au point M_0 de coordonnées $(x_0; f(x_0))$,
- à déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de (T_0) avec l'axe des abscisses
puis à itérer le procédé :
- on construit la tangente (T_1) à la courbe de f au point de coordonnées $(x_1; f(x_1))$,
- cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_2 ... etc.

> On démontre que, comme le suggère le dessin, on obtient une suite (x_n) de points de l'intervalle $]s, x_0]$ qui est strictement décroissante et converge vers s, solution de l'équation $f(x) = 0$, si les hypothèses (h_1), (h_2), (h_3) et (h_4) sont satisfaites.

3.a - Écrire une équation de la tangente (T_0) au graphe de f au point M_0 d'abscisse x_0. En déduire l'abscisse x_1 du point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses. En itérant le procédé, on obtient (x_n) qui est donc définie par son premier terme x_0 et par la formule de récurrence

$$\forall n \geqslant 0, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{2}$$

3.b - On considère l'algorithme suivant que l'on complétera : il reçoit en entrée la valeur x_0 et affiche en sortie la liste des nombres $x_1, \ldots, x_{10}$ précédemment définis.

Algorithme : Méthode de Newton-Raphson

Entrées : x_0
Sorties : liste de dix nombres de plus en plus proches de s
Début du traitement des données :
Lire : ...
s prend la valeur a
Pour k allant de 1 à ...
    s prend la valeur $s-\ldots$
    Afficher : s
FinPour
Fin du traitement des données

La meilleure approximation de s dans la liste obtenue est évidemment le dernier terme x_{10}.

3.c - On peut aussi envisager d'imposer une précision à atteindre. Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'en recevant x_0 et p, p entier naturel non nul, il fournisse un nombre r tel que $|f(r)| \leqslant 10^{-p}$? Faut-il garder la boucle **Pour** ?

4 - Appliquer la méthode de Newton-Raphson pour résoudre l'équation $x^5 + 5x - 2 = 0$ en calculant $x_1, \ldots, x_{10}$ puis en trouvant une valeur approchée de s à 10^{-12} près. On utilisera pour cela une calculatrice, « scilab » ou « Xcas ».

Indication : On pourra choisir $]\alpha; \beta[=]0; 100[$, $[a; b] = [0.1; 10]$ puis, successivement $x_0 = 10$ et $x_0 = 0.5$, en justifiant ces choix.

5 - On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \sqrt[3]{x - 0,5}$.
On se propose d'appliquer la méthode de Newton-Raphson à l'équation $\sqrt[3]{x - 0,5} = 0$, en choisissant $x_0 = 1$.

a. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de la tangente T_0 à la courbe de f au point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ avec l'axe des abscisses.

b. Déterminer l'abscisse x_2 du point d'intersection de la tangente T_1 à la courbe de f au point de coordonnées $(x_1; f(x_1))$ avec l'axe des abscisses.

Il semble, avec ces deux calculs que l'on ne s'approche pas de la solution évidente $\frac{1}{2}$ de l'équation $\sqrt[3]{x - 0,5} = 0$.

c. On définit la suite (x_n) comme à la question **3.a** .
Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\quad x_{n+1} = -2x_n + 1,5$. En déduire que $(x_{n+1} - x_n)$ est une suite géométrique de raison -2 et conclure.

d. Utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour construire les premières étapes de la méthode. Commenter.