



Quadrature du cercle

1S

Fiche Professeur

Auteur : Pierre Lapôte

But de l'activité : On sait que construire à la règle et au compas un carré ayant l'aire π du cercle-unité est impossible. Dans cette activité est proposée la construction d'un carré dont l'aire est voisine de π . L'aire de ce carré est évaluée par le logiciel de géométrie utilisé, puis retrouvée de manière exacte par le calcul.

Un point d'histoire des mathématiques : En 1882, le mathématicien allemand Ferdinand von Lindemann démontre la transcendance de π . En appliquant ensuite un théorème de Pierre-Laurent Wantzel (1837), il peut conclure que le problème de la quadrature du cercle n'a pas de solution : il est impossible de construire à la règle et au compas un carré dont l'aire soit celle du cercle unité, soit π .

Pré-requis :

- ✓ équation d'une droite passant par 2 points
- ✓ théorème de Pythagore
- ✓ équation d'une droite de coefficient directeur donné passant par un point
- ✓ coordonnées du milieu d'un segment
- ✓ relation entre hauteur et côtés dans un triangle rectangle
- ✓ Savoir-faire : utiliser un logiciel de géométrie dynamique comme « GeoGebra »

Matériels utilisés :

- ✓ salle informatique
- ✓ ordinateurs équipés de « GeoGebra » ou analogue.

Durée indicative : 1 heure

Noms des logiciels utilisés : « GeoGebra » ou analogue et calculette ou logiciel de calcul numérique

Documents utiles à télécharger :

- ✓ Fiche Élève
- ✓ Fichier « Quadrature » (fichier ggb, pour les professeurs)

Niveau de difficulté : Normal voire facile, la construction ne pose pas de problème, la démonstration pas davantage.

Solution :

1 - L'aire c du carré donnée par « GeoGebra » vérifie $3,1415919 < c < 3,1415920 < 3,1415926 < \pi < 3,1415927$. Si on prend c comme valeur approchée de π , c'est une valeur approchée par défaut et l'erreur d'approximation est $< 8 \cdot 10^{-7}$.

2 - Équation de la droite (OD) : $y = -2,6x + 2,6$; abscisse de E : $\sqrt{5,84}$; équation de la droite (EF) : $y = -2,6x + 2,6\sqrt{5,84}$; ordonnée de F : $2,6\sqrt{5,84}$; ordonnée de G : $1,3\sqrt{5,84}$.

3 - On peut démontrer que $AL^2 = OA \times AH$ à partir de l'égalité des angles aigus \widehat{AHL} et \widehat{ALO} , en égalant leurs tangentes. Une variante consiste à utiliser le théorème de Pythagore dans les triangles OHL , OAL , ALH et à développer $OH^2 = (AH + AO)^2$. $AL = \sqrt{1,3\sqrt{5,84}}$.

4 - $c = 1,3\sqrt{5,84}$.

Références :

Théorie des corps, la règle et le compas, de J.C. Carrega, Hermann, ISBN 2 7056 1402 8 (page 93).

Quadrature du cercle, article de l'encyclopédie en ligne Wikipedia

http://fr.wikipedia.org/wiki/Quadrature_du_cercle

Programme de mathématiques, cycle terminal de la série scientifique, classe de Première

http://media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf

