Quadrature du cercle

1S

Fiche Élève

Auteur : PL

Le problème de la quadrature du cercle

Ce problème, connu depuis l'Antiquité, consistait à essayer de construire, à la règle et au compas, un carré dont l'aire serait égale à l'aire π du cercle-unité (ce qui revient à construire $\sqrt{\pi}$ à la règle et au compas). Il a été démontré à la fin du XIX$^{\text{ième}}$ siècle que ce problème n'a pas de solution. On peut toutefois obtenir une solution approchée.

Construction

En ouvrant un logiciel de géométrie dynamique,

✓ créer les points repérés suivants :

$$A(0;0), \quad O(1;0), \quad B(0;2), \quad C\left(0;\frac{11}{5}\right), \quad D\left(0;\frac{13}{5}\right)$$

✓ tracer le cercle γ de centre O, passant par A.

✓ Le cercle de centre A, de rayon OC coupe la demi-droite $[AO)$ en E.

✓ La parallèle à (OD) passant par E coupe la demi-droite $[AB)$ en F.

✓ G est le milieu de $[AF]$, H est le point de l'axe des abscisses d'abscisse négative tel que $AH = AG$.

✓ Le cercle de diamètre $[OH]$ coupe la demi-droite $[AB)$ en L.

✓ Construire alors le carré $ALMN$ où N est un point de l'axe des abscisses d'abscisse négative.

Questions

1. Utiliser le logiciel pour comparer l'aire du carré $ALMN$ à celle du cercle γ.
2. **a.** Déterminer une équation de la droite (OD).

   b. Déterminer l'abscisse de E (valeur exacte) puis une équation de la droite (EF).
   Quelle est l'ordonnée de F (valeur exacte) ? celle de G ?
3. En remarquant que le triangle HOL est rectangle, montrer que $AL^2 = OA \times AH$; en déduire la valeur exacte de AL.
4. Conclure.