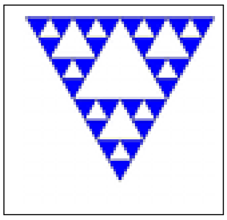

Algorithmique : les triangles de Sierpiński TS

Fiche professeur

Auteur : Raymond Moché

But de l'activité : Activité de consolidation d'algorithmique basée sur la suite des triangles de Sierpiński, menant à la fractale du même nom, requérant très peu de géométrie et secondairement la résolution d'inégalités à l'aide de la fonction logarithme népérien.

Compétences engagées :
- ✓ Géométrie : Milieu d'un segment.
- ✓ Algorithmique : Déchiffrer et comprendre un algorithme exécutable par « scilab » (qui peut être remplacé par un logiciel de calcul équivalent, mais il faut alors ré-écrire la fiche « Élève »), utiliser l'éditeur de texte de « scilab », charger une fonction dans « scilab » et exécuter un algorithme.
- ✓ Comprendre comment on utilise une nouvelle commande (« xfpolys », décrite dans la fiche « Élève »).
- ✓ Remarque : la fiche « Élève » contient 3 listings « scilab » commentés.

Pré-requis :
- ✓ Géométrie : Savoir calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
- ✓ Algorithmique : boucle « pour » ; utilisation de « plot ».

Matériels utilisés : Salle informatique : ordinateurs équipés de « scilab ».
Durée indicative : 1 heure ; les questions 6, 7 et 8 peuvent être terminées en classe (à l'aide d'une calculatrice).
Noms du logiciel utilisé : « scilab ».
Documents utiles à télécharger :
- ✓ Fiche« Élève », fiche « Professeur » (documents pdf).
- ✓ Algorithmes « PremierTrinski », « Fonctinski », « NiemeTrinski » (documents sce ou sci).

Déroulement de la séance :
- ✓ Suivre la fiche « Élève ». La difficulté principale se trouve dans le troisième algorithme qui comprend une boucle « pour » dans laquelle est insérée une autre boucle « pour ». En fait, on demande seulement aux élèves d'exécuter l'algorithme, qui est soigneusement commenté, donc compréhensible.
- ✓ Les questions précédentes portent sur certaines commandes des deux premiers algorithmes. Les quelques commandes techniques seront ignorées.
- ✓ Les questions 6 et 7 reposent sur le fait que le logarithme est une fonction strictement croissante.
- ✓ La question 8 est une question d'ouverture.

Solution :

4 - Il s'agit des triangles AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, $A_1B_1C_1$.

5 - On constate que pour $N = 7$, les calculs sont longs. Nous avons pu tracer TS_8 et TS_9. Cela n'a pas d'autre intérêt que de montrer que la suite des triangles de Sierpińki paraît constante à partir de $N = 7$. En fait, c'est faux. Un zoom dans la zone bleue de TS_7 montre qu'il y a encore beaucoup de place pour faire de nouveaux petits trous triangulaires !

6 - $p_N = 6 \cdot \dfrac{3^N}{2^N}$.

On en déduit que $p_N \geq 10^9 \iff N \geq \dfrac{\ln(\frac{10^9}{6})}{\ln(\frac{3}{2})}) = 46.690839702705$. La condition recherchée est donc $N \geq 47$.

7 - $a_N = \sqrt{3} \cdot \dfrac{3^N}{4^N}$.

On en déduit que $a_N \leq 10^{-9} \iff N \geq \dfrac{\ln(\sqrt{3}\cdot 10^9)}{\ln(\frac{4}{3})}) = 73.944725856513$. La condition recherchée est donc $N \geq 74$.

8 - $N \geq 74$. Ce qui est curieux, c'est que l'on a une suite de surfaces assez simples (les surfaces bleues successives) qui peuvent avoir une aire aussi petite que l'on veut tout en ayant un périmètre aussi grand que l'on veut. On peut imaginer que quand N est suffisamment grand, les petits triangles bleus dans TS_N deviennent invisibles et que par conséquent TS_N devient lui-même invisible. Ou bien forme-t-il une tache bleuâtre ? On ne peut malheureusement pas essayer de « grandes » valeurs de N en raison de l'énormité du nombre de calculs qui seraient nécessaires.

Pour aller plus loin :

1 - On peut essayer d'imaginer ce qui se passe quand N tend vers $+\infty$. On a envie de dire que la limite, qui est la fractale de Sierpiński, est une surface d'aire nulle et de périmètre infini.

2 - L'article de Wikipedia propose en fait 4 algorithmes. Le second repose sur le fait que pour passer de TS_1 à TS_2 (ou de TS_N à TS_{N+1}), il suffit d'appliquer à TS_1 les 3 homothéties de rapport $\frac{1}{2}$ et de centres respectifs A, B et C. Cela suggère de reprendre le problème à l'aide d'un logiciel de géométrie. Ce serait apparemment plus simple et plus riche du point de vue de la géométrie.

Référence :

Triangle de Sierpiński, article de l'encyclopédie en ligne Wikipedia
http://fr.wikipedia.org/wiki/Triangle_de_Sierpinski