Espérance, variance, simulation

1S

Fiche professeur (Xcas)

Auteur : Raymond Moché

Algorithmique et calcul des probabilités : Le tirage simultané de deux boules parmi 10 boules numérotées de 1 à 10 introduit un modèle équiprobable. On considère les variables aléatoires égales respectivement au plus petit numéro tiré, au plus grand et à leur somme. Dans la première partie, on décrit leur loi et on calcule exactement leur espérance et leur variance. Dans la seconde partie, on simule 10 000 tirages pour obtenir une approximation de l'espérance et de la variance du plus petit numéro tiré via une approche heuristique de la loi des grands nombres.

Compétences engagées :

- ✓ Comprendre, compléter et exécuter un algorithme de simulation exécutable par « Xcas ».
- ✓ Modéliser et simuler une expérience aléatoire relevant de l'équiprobabilité.
- ✓ Interpréter des événements de manière ensembliste.
- ✓ Déterminer et exploiter la loi d'une variable aléatoire.
- ✓ Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire.
- ✓ Interpréter l'espérance et la variance comme valeurs moyennes dans le cas d'un grand nombre de répétitions.

Matériels utilisés : Ordinateurs munis de « Xcas »

Durée indicative : 1 heure en salle informatique pour chacune des deux parties plus éventuellement une préparation à la maison.

Documents utiles à télécharger :

- ✓ Fiche Élève Xcas (pdf)
- ✓ Fiche Professeur Xcas (pdf)
- ✓ Fichiers « Xcas »(xws) : « EstVar », « Simulation » et, pour les professeurs, le fichier « ToutProf ».

Commentaires : La première partie (Calculs d'espérances et de variances) est habituellement longue et ennuyante. Elle a été agrémentée par la question **3** qui est intéressante et sans calcul et la question **4.c** qui porte sur la linéarité de l'espérance et la non-linéarité de la variance.

Bien sûr, la 1$^{\text{ère}}$ partie pourrait se faire à la calculatrice ou même à la main : en disposant bien les calculs et avec un peu de métier, ça va très vite. On a voulu, en choisissant « Xcas » profiter de l'aptitude de ce logiciel *à faire des calculs exacts en rationnels.*

La deuxième partie colle aussi au programme, voir le corrigé.

Solution et commentaires :

Première partie :

1.b - Utiliser les commandes

```
N :=size(Omega) ;
   retourne(N) ;
```

et ajouter N à la liste des variables locales.

1.c - On obtient 45 qui est le nombre de combinaisons de 10 objets pris 2 à 2.

2.a - Il est évident que tous les couples sont équiprobables, mais il faut le préciser. En effet, dans le sens commun, « au hasard » signifie justement qu'il y a équiprobabilité. En Calcul des probabilités, c'est faux. On peut dire (voir plus loin) que les valeurs de S sont tirées au hasard, mais les différentes valeurs prises ne sont pas équiprobables. La probabilité qu'un couple particulier sorte est donc $\frac{1}{45}$.

2.b - La loi de X est décrite dans le tableau suivant :

Valeurs de X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilités	9/45	8/45	7/45	6/45	5/45	4/45	3/45	2/45	1/45

Comme on est dans le cas équiprobable, on a utilisé la formule : $\dfrac{\text{Nombre de cas favorables}}{\text{Nombre de cas possibles}}\cdot$ Par exemple, la probabilité de l'événement $(X = 3)$ est $\dfrac{7}{45}\cdot$

2.c - Bien sûr, ces calculs pourraient aussi se faire à la calculatrice ou même à la main (ça va très vite si on dispose bien les calculs en tableau). En ajoutant les commandes ad hoc (voir le fichier « ToutProf »), on obtient

$$\mathrm{E}\,(X) = \frac{11}{3} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}\,(X) = \frac{44}{9} \tag{1}$$

3 - Cette question est intéressante.

3.a - On vérifie facilement que le tableau qui décrit la loi de la variable aléatoire $10-Y$ est exactement le même que celui qui décrit la loi de $X - 1$.

Comme c'est un peu long et fastidieux, on peut aussi invoquer assez vaguement un principe de symétrie : $X - 1$ et $10 - Y$ ont pour cette raison la même loi. Plus précisément, si on inverse la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, $X - 1$ et $10 - Y$ s'échangent.

3.b - On en déduit que

$$\mathrm{E}\,(X-1) = \mathrm{E}\,(10-Y) \quad \text{et} \quad \mathrm{var}\,(X-1) = \mathrm{var}\,(10-Y)$$

ce qui prouve, compte tenu des formules $\mathrm{E}\,(aX + b) = a\,\mathrm{E}\,(X) + b$ et $\mathrm{var}\,(aX + b) = a^2\,\mathrm{var}\,(X)$ et de (1) que

$$\mathrm{E}\,(Y) = \frac{22}{3} \quad \text{et} \quad \mathrm{var}\,(Y) = \frac{44}{9} \tag{2}$$

(à propos de l'égalité $\mathrm{var}\,(X + b) = \mathrm{var}\,(X)$, on fera remarquer aux élèves qu'il est évident, quand on regarde la définition de la variance, que la variance d'une variable aléatoire ne change pas quand on lui ajoute une constante).

4.a - Loi de S :

Valeurs de S	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Probabilités	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{5}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{3}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{2}{45}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{45}$

4.b - On trouve $\mathrm{E}\,(S) = 11$ et $\mathrm{var}\,(S) = \dfrac{44}{3}\cdot$

4.c - Il serait très hasardeux de conjecturer que $\mathrm{E}\,(X + Y) = \mathrm{E}\,(X) + \mathrm{E}\,(Y)$ quelles que soient les variables aléatoires X et Y compatibles avec le programme, disons quelles que soient les variables aléatoires qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, à partir d'un seul exemple. Pourtant c'est vrai. Ce que les élèves peuvent dire, c'est que le premier énoncé peut être exact et que le second est certainement faux puisque nous trouvons que $\mathrm{var}\,(S) = \dfrac{44}{3} \neq \dfrac{88}{9} = \mathrm{var}\,(X) + \mathrm{var}\,(Y)$.

5.c - En regardant les nuages de points `MoyX` et `VarX`, on constate qu'on peut considérer la dernière valeur de `MoyX` et la dernière valeur de `VarX`, calculées à partir des 10 000 résultats expérimentaux, comme de bonnes approximations de la moyenne et de la variance de la variable aléatoire X, qui sont calculées à partir de la loi de X et sont donc des notions théoriques. Ainsi, si la moyenne et la variance de X n'étaient pas calculables (par exemple parce que l'on ne sait pas exhiber la loi de X ; il est facile de montrer de tels cas), on pourrait en trouver expérimentalement de bonnes approximations via les suites analogues à `MoyX` et `VarX` qui s'appellent suite des *moyennes empiriques* et suite des *variances empiriques*.

Références :

BO officiel spécial n°9 du 30 septembre 2010 : *Mathématiques, cycle terminal de la série scientifique, classe de première*

http://media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf