

(1,3)

Espérance, variance, simulation

1S

Fiche Élève (Xcas)

Auteur : RM

On considère l'expérience qui consiste à tirer au hasard 2 boules dans une urne qui en contient 10, numérotées de 1 à 10. L'ensemble de tous les résultats possibles est l'ensemble Ω de tous les couples d'entiers (a, b) tels que $1 \leq a < b \leq 10$. Nous allons considérer les variables aléatoires X, Y et S ainsi définies à partir de ce tirage aléatoire :

$$\forall (a, b) \in \Omega, \quad X(a, b) = a, \quad Y(a, b) = b, \quad S = a + b$$

(X est le plus petit numéro sorti, Y le plus grand, S leur somme). Dans la première partie, on calculera exactement leur espérance et leur variance; dans la seconde partie, on en calculera des valeurs approchées à partir de simulations du tirage.

Première partie : espérances et variances

1.a - Ouvrir l'algorithme « EspVar » dans « Xcas ». C'est l'algorithme ci-dessous :

```
EspVar() :={  
local Omega ;  
Omega :=[[1,2], [1,3], [1,4], [1,5], [1,6], [1,7], [1,8], [1,9], [1,10],  
[2,3], [2,4], [2,5], [2,6], [2,7], [2,8], [2,9], [2,10],  
[3,4], [3,5], [3,6], [3,7], [3,8], [3,9], [3,10],  
[4,5], [4,6], [4,7], [4,8], [4,9], [4,10],  
[5,6], [5,7], [5,8], [5,9], [5,10],  
[6,7], [6,8], [6,9], [6,10],  
[7,8], [7,9], [7,10],  
[8,9], [8,10],  
[9,10]] ;  
} ;
```

On constate que l'ensemble des résultats possibles du tirage aléatoire apparaît comme une liste de N éléments qui sont eux-mêmes des listes de 2 termes. Nous allons compléter l'algorithme « EspVar » au fur et à mesure.

1.b - Ajouter à l'algorithme « EspVar » une commande qui calcule N .

Indication : On pourra consulter la commande « size » dans l'aide de « Xcas ».

1.c - Vérifier que $N = 45$ en exécutant l'algorithme.

2 - Loi de X

2.a - Dans le tirage au hasard de 2 boules, les différents résultats possibles sont-ils équiprobables ?

2.b - La variable aléatoire X peut prendre les valeurs $1, 2, \dots, 9$. Indiquer avec quelle probabilité chacune de ces valeurs est prise dans le tableau :

Valeurs de X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Probabilités	/45	/45	/45	/45	/45	/45	/45	/45	/45

2.c - Calculer l'espérance et la variance de X en ajoutant les commandes ad hoc à l'algorithme « EspVar », puis en l'exécutant.

Indication : On pourra par exemple entrer les valeurs prises par la variable aléatoire X à l'aide de la

commande `X :=makelist(k->k+1,0,8)` ; . Si nécessaire, on pourra aussi consulter l'aide de « Xcas » à propos des commandes `moyenne` et `variance`.

3 - Loi de Y

3.a - Démontrer que les variables aléatoires $X - 1$ et $10 - Y$ ont la même loi.

3.b - En déduire l'espérance et la variance de Y .

4 - Loi de S

4.a - Décrire la loi de S en remplissant le tableau suivant :

Valeurs de S	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
Probabilités																	

4.b - Calculer l'espérance et la variance de S à l'aide de « Xcas » comme précédemment pour X .

4.c - Que peut-on penser des énoncés suivants :

“L'espérance de la somme de 2 variables aléatoires est la somme de leurs espérances”.

“ La variance de la somme de 2 variables aléatoires est la somme de leurs variances”.

Deuxième partie : simulation

Pour simuler le tirage de 2 boules au hasard dans l'urne, il suffit de tirer au hasard un nombre entre 1 et N et de convenir que ce nombre est le rang dans Ω de la paire de boules tirées. Par exemple, si on tire 13, on considère que l'on a tiré (2,6) (la boule n°2 et la boule n°6).

5 - Nous allons ainsi simuler T tirages successifs de deux boules, ces tirages étant indépendants les uns des autres. Notons x_1, x_2, \dots, x_T les valeurs prises par la variable aléatoire X au cours de ces T tirages. Le problème est d'étudier l'évolution, quand j varie de 1 à T , de la moyenne (stockée dans `MoyX`) et de la variance (stockée dans `VarX`) de la liste x_1, x_2, \dots, x_j .

5.a - Charger dans « Xcas » le fichier « Simulation ».

5.b - Expliquer le bloc de commandes

```
X:=0;
XX:=0;
MoyX:=[];
VarX:=[];
pour j de 1 jusque T faire
t:=alea(N);
X:=X+Omega[t][0];
XX:=XX+(Omega[t][0])^2;
MoyX:=append(MoyX,X/j);
var:=XX/j-(X/j)^2;
VarX:=append(VarX,var);
fpour;
```

On indiquera en particulier quelle formule a été utilisée pour le calcul des variances successives.

5.c - Exécuter cet algorithme pour $T = 10000$ (on admettra les commandes graphiques); commenter le graphe de l'évolution de `MoyX` et de `VarX`.

