10 Une suite aléatoire convenable de 0 et de 1 — TS

Fiche professeur

Auteur : Martijn van Brugghe

But de l'activité : Indépendance de deux événements, simulation, modélisation Fabriquer une suite aléatoire de 0 et de 1 qui vérifie les hypothèses de la loi des grands nombres. L'indépendance de ces variables aléatoires est démontrée à l'aide d'un arbre pondéré. Des probabilités conditionnelles interviennent.

Compétences engagées :
- ✓ Indépendance de 2 événements et de 2 variables aléatoires, probabilités conditionnelles.
- ✓ Répétition d'expériences identiques et indépendantes.
- ✓ Conditionnement par un événement de probabilité non nulle.

Pré-requis :
- ✓ Loi des grands nombres telle qu'elle a été vue en Première.
- ✓ Usage d'un tableur ou d'un logiciel de calcul numérique type « scilab ».
- ✓ Représentation d'expériences aléatoires par un arbre pondéré.

Matériel utilisé :

Ordinateur muni de « Calc » (tableur de la suite bureautique d'OOo) ou d'un logiciel de calcul numérique type « scilab ».

Durée indicative :

2 heures

Documents utiles à télécharger :
- ✓ « Fiche Élève », « Classeur Élève ».
- ✓ « Fiche Professeur », « Classeur Professeur ».
- ✓ Fiche « Calculs » (fichier « scilab »).

Niveau de difficulté :

Ce qui touche à l'indépendance (question **5**) est plutôt difficile.

Déroulement de la séance : Travailler selon la « Fiche Élève ». La question **4** peut s'expédier en une ligne ou deux. Néanmoins, la solution avec un arbre permet de préparer une solution de la question suivante. Pour cela, il paraît indispensable que le professeur détaille le calcul des probabilités conditionnelles qui figurent sur les seconds rameaux du deuxième arbre proposé dans la solution. Il pourra alors dire à ses élèves que tout se passe de la même manière si on ajoute un troisième rameau, ce qui rendra facile la question suivante.

Solution et commentaires :

1 - On est dans le cas de la répétition d'événements identiques et indépendants : la probabilité que « pile » sorte aux 9 premiers lancers est le produit qu'il sorte à chacun de ces lancers, soit $\dfrac{1}{2^9}\cdot$

2 - $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

3 - Cette question se réfère à la loi des grands nombre vue en Première : $\dfrac{s_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ parce que $\dfrac{1}{2}$ est la probabilité commune des événements $(X_1 = 1), \ldots, (X_n = 1), \ldots$

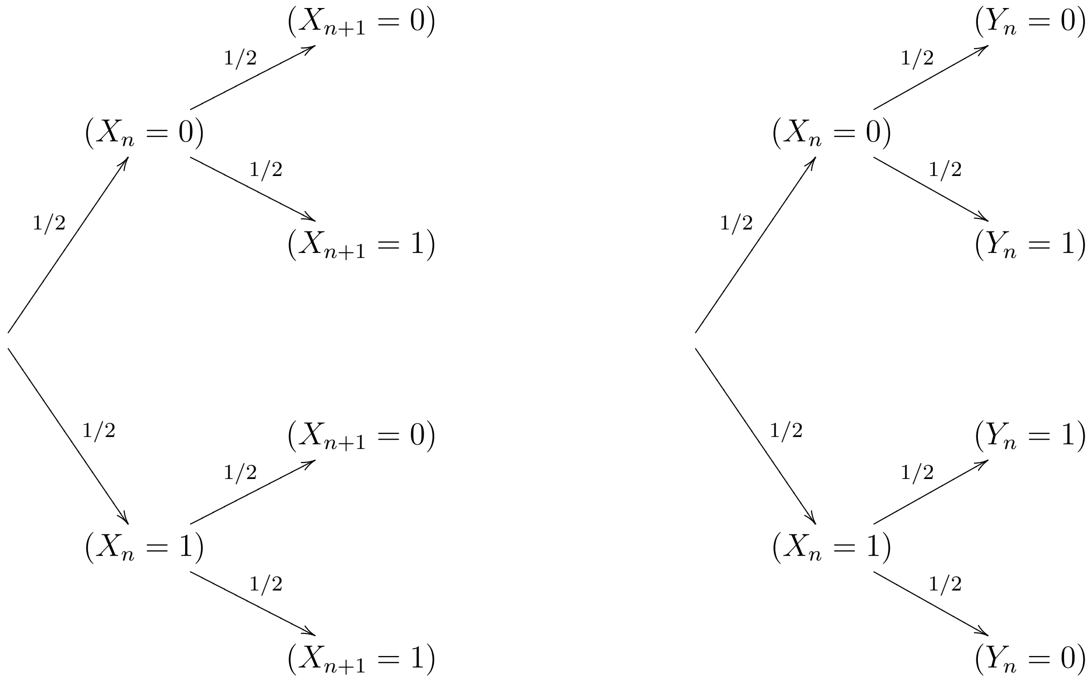
4 - Par définition, Y_n est une variable aléatoire qui ne prend que les valeurs 0 et 1. Comme ces nombres jouent des rôles symétriques,

$$P(Y_n = 0) = P(Y_n = 1) = \tfrac{1}{2}\cdot$$

Cette démonstration suffit. Néanmoins, on peut préférer la démonstration suivante (qu'il vaudrait mieux écrire formellement, avec des événements considérés comme des ensembles, des intersections d'événements, etc) : l'événement « $Y_n = 1$ » est la réunion des événements incompatibles « $X_n = 1$ et $X_{n+1} = 0$ » d'une part, « $X_n = 0$ et $X_{n+1} = 1$ » d'autre part. La probabilité de chacun de ces événements incompatibles est $\frac{1}{4}$ (parce que les variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes et prennent les valeurs 0 et 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$: cette propriété a déjà été utilisée à la première question). Par conséquent, la variable aléatoire Y_n prend la valeur 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}\cdot$ Il s'ensuit, par passage au complémentaire, qu'elle prend la valeur 0 avec la même probabilité.

On peut encore préférer une démonstration sous forme d'arbre. Deux arbres sont donnés ci-dessous. *Il est important que les élèves comprennent que ces deux arbres représentent bien le* $n^{\text{ème}}$ *et le* $(n+1)^{\text{ème}}$ *lancers. Pourtant, ils sont bien différents. Le premier est un arbre ordinaire dont les probabilités sont justifiées par le fait que les variables aléatoires* X_n *et* X_{n+1} *sont indépendantes. Les probabilités qui figurent sur les seconds rameaux de chaque branche du second arbre sont des probabilités conditionnelles. Justifions la première branche de ce second arbre (les autres justifications sont identiques) :*

- $(X_n = 0) \cap (X_{n+1} = 0) = (X_n = 0) \cap (Y_n = 0)$, *autrement dit* $(X_n = 0, X_{n+1} = 0) = (X_n = 0, Y_n = 0)$ *: les événements de part et d'autre du signe = sont identiques ;*
- $P(X_n = 0, X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0) \times P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{4}$, *parce que les variables aléatoires* X_n *et* X_{n+1} *sont indépendantes, ce qui entraîne que les événements considérés sont indépendants ;*
- $\dfrac{1}{4} = P(X_n = 0) \times P(Y_n = 0/X_n = 0)$, *par définition de la probabilité conditionnelle ;*
- *donc* $P(Y_n = 0/X_n = 0) = \dfrac{1}{2}\cdot$

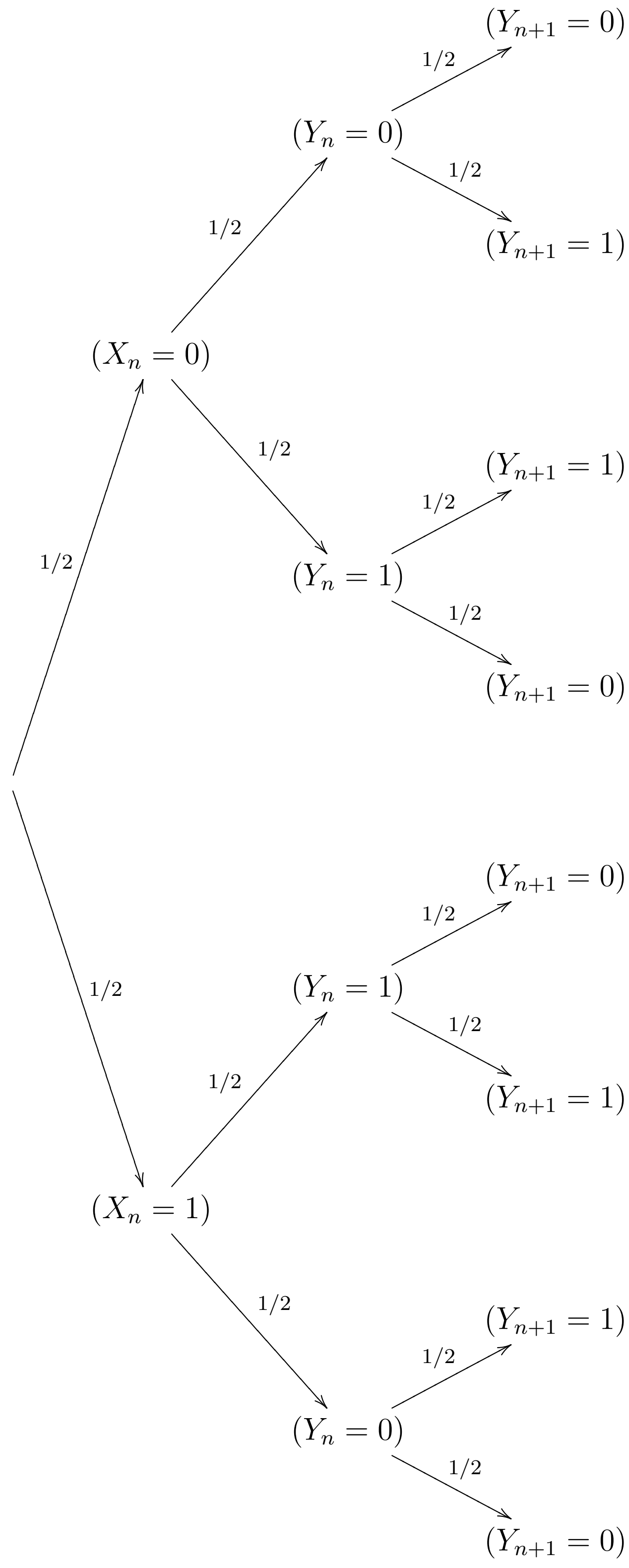


On déduit du second arbre de la manière habituelle que les événements $(Y_n = 0)$ et $(Y_n = 1)$ sont de probabilité $\dfrac{1}{2}\cdot$

5 - Il suffit de lire sur l'arbre ci-dessous que

$$P(Y_n = 1, Y_{n+1} = 1) = \frac{1}{4} = P(Y_n = 1) \times P(Y_{n+1} = 1)$$

La notation $(Y_n = 1, Y_{n+1} = 1)$ se lit $(Y_n = 1)$ et $(Y_{n+1} = 1)$ ou $(Y_n = 1) \cap (Y_{n+1} = 1)$. L'arbre se comprend en pensant aux arbres de la question **4**.



On lit de même sur l'arbre que les couples $(Y_n = 1)$ et $(Y_{n+1} = 0)$, $(Y_n = 0)$ et $(Y_{n+1} = 1)$, $(Y_n = 0)$ et $(Y_{n+1} = 0)$ sont des couples d'événements indépendants, ce qui prouve que les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes.
La dépendance ou l'indépendance des variables aléatoires est en général intuitivement évidente. Ce n'est pas le cas ici : l'indépendance de Y_n et de Y_{n+1} n'est pas évidente parce que les valeurs prises par ces variables aléatoires dépendent de la valeur prise par X_{n+1}, ce qui établit une liaison entre elles.

L'énoncé demande seulement de démontrer l'indépendance de Y_n et de Y_{n+1} parce que le programme se limite à l'indépendance de 2 variables aléatoires.

Complément pour les professeurs intéressés : Démontrer l'indépendance des variables aléatoires d'une suite infinie est en général compliqué parce que la définition de l'indépendance est elle-même compliquée dans ce cas. Heureusement, nous sommes dans un cas particulier. En effet, les variables aléatoires Y_1, Y_2, ... ne prennent que les valeurs 0 et 1. On démontre qu'il suffit alors de prouver que quels que soient l'entier $n \geq 2$ et la suite $(y_1, \ldots, y_n)$ formée de 0 et de 1,

$$P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = P(Y_1 = y_1) \times \cdots \times P(Y_n = y_n),$$

autrement dit,

$$P(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) = \frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

Or l'événement $(Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n)$ est la réunion des événements incompatibles

$$(X_1 = 0, Y_1 = y_1, \ldots, Y_n = y_n) \text{ et } (X_1 = 1, Y_1 = u_1, \ldots, Y_n = u_n),$$

événements que l'on peut encore écrire

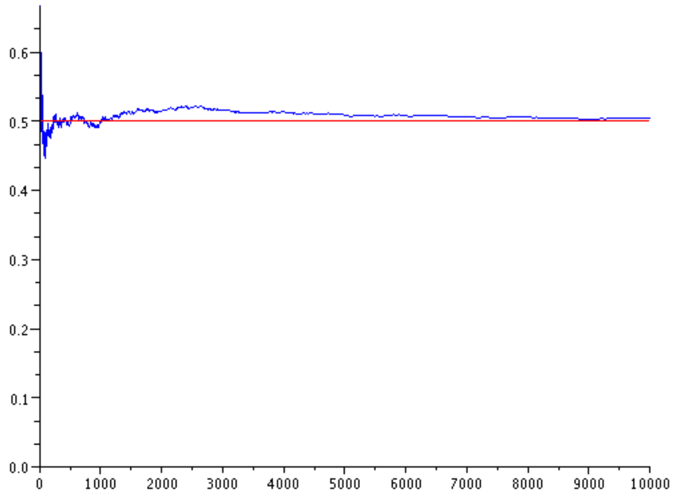
$$(X_1 = 0, X_2 = x_1, \ldots, X_{n+1} = x_n) \quad \text{et} \quad (X_1 = 1, X_2 = x'_1, \ldots, X_{n+1} = x'_n)$$

pour un choix convenable de $x_1, \ldots, x_n, x'_1, \ldots, x'_n$. Comme les variables aléatoires $X_1, \ldots X_{n+1}$ sont indépendantes et prennent les valeurs 0 et 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, chacun d'eux a la probabilité $\frac{1}{2^{n+1}}$, donc l'égalité (1) est satisfaite.

7 - Voir le « Classeur Professeur ». Les fonctions à utiliser ont été insérées dans le « Classeur Élève ». Ces formules pourraient être effacées par le professeur car la question posée est déjà connue des élèves.

8 - Y_1, Y_2, ... étant une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs 0 et 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, on peut lui appliquer la loi des grands nombres, exactement comme on l'a fait pour la suite X_1, X_2, ... à la question **3**.

9 - L'algorithme « scilab » est facile à écrire (nous avons utilisé un vecteur booléen qui n'est absolument pas indispensable). On peut tirer sans problème des échantillons de taille 100000. Voici un graphe obtenu après tirage d'un échantillon de taille 10000 :



Pour aller plus loin :

✓ On pourra démontrer que si l'on suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, ... prennent les valeurs 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$, le reste étant inchangé, les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} cessent d'être indépendantes.