10 Une suite aléatoire convenable de 0 et de 1 TS

Fiche élève

Auteur : MvB

Imaginons qu'on lance indéfiniment une pièce de monnaie équilibrée. Les lancers sont, bien sûr, indépendants. Pour $n = 1, 2, \ldots$, on notera X_n la variable aléatoire qui vaut 1 si « pile » sort au n$^{\text{ème}}$ lancer, 0 sinon. Ces variables aléatoires sont donc indépendantes et ne prennent que les valeurs 0 et 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}\cdot$

Première partie

1 - Considérons les événements $(X_1 = 1)$, $(X_2 = 1)$,..., $(X_9 = 1)$ (« pile sort au 1$^{\text{er}}$ lancer », « pile sort au 2$^{\text{ème}}$ lancer », ..., « pile sort au 9$^{\text{ème}}$ lancer ». Quelle est la probabilité que « pile » sorte lors des 9 premiers lancers ?

2 - Comment s'écrit, en fonction de $X_1, \ldots, X_n$, la variable aléatoire égale au nombre de « pile » sortis au cours des n premiers lancers ?

3 - Imaginons que l'on *réalise* l'expérience aléatoire décrite ci-dessus. Notons $x_1, x_2, \ldots$ les *valeurs* prises par les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots$, notons s_n la *valeur* prise par la variable aléatoire S_n. Que peut-on dire de la suite de terme général $\frac{s_n}{n}$ quand $n \to +\infty$?

Deuxième partie

Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle Y_n la variable aléatoire qui vaut 1 si l'événement $(X_n \neq X_{n+1})$ est réalisé, 0 sinon (autrement dit, Y_n prend la valeur 1 si les variables aléatoires X_n et X_{n+1} prennent des valeurs différentes et prend la valeur 0 si X_n et X_{n+1} prennent la même valeur).

4 - Démontrer que les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ prennent toutes les valeurs 0 et 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}\cdot$

Indication : Il y a plusieurs démonstrations possibles dont une démonstration sous forme d'arbre.

5 - Démontrer que les événements $(Y_n = 1)$ et $(Y_{n+1} = 1)$ (« Y_n prend la valeur 1 » et « Y_{n+1} prend la valeur 1 ») sont indépendants.

Indication : Utiliser de préférence un arbre.

Commentaires : On pourrait démontrer de même que les couples $(Y_n = 1)$ et $(Y_{n+1} = 0)$, $(Y_n = 0)$ et $(Y_{n+1} = 1)$, $(Y_n = 0)$ et $(Y_{n+1} = 0)$ sont des couples d'événements indépendants. On pourrait aussi déduire directement ces propriétés de l'indépendance des événements $(Y_n = 1)$ et $(Y_{n+1} = 1)$.

On peut donc conclure que les variables aléatoires Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes. On admettra plus généralement que les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$ sont indépendantes, autrement dit, qu'on peut les choisir elles aussi comme un modèle du lancer répété indéfiniment d'une pièce de monnaie équilibrée. C'est en ce sens que la suite aléatoire étudiée est convenable.

6 - On appelle T_n la variable aléatoire égale au nombre de fois que les variables $Y_1, \ldots, Y_n$ prennent la valeur 1 au cours des n premiers lancers. Imaginons que l'on ait *réalisé* une suite infinie de lancers. Appelons t_n la valeur prise par T_n. Que peut-on dire de la suite de terme général $\frac{t_n}{n}$ quand $n \to +\infty$?

Troisième partie : algorithmique et simulation

Cette partie a seulement pour but d'illustrer la question **6**. Traiter au choix l'une des versions suivantes :

Version « tableur » de la Troisième partie

7 - Ouvrir le « Classeur Élève », simuler 2001 lancers d'une pièce équilibrée (plage A1 : A2001), en déduire la suite des valeurs que prennent successivement les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{2000}$ (plage B1 : B2000). Le graphe (pré-programmé) des fréquences d'apparition du 1 dans cette suite apparaîtra.

8 - Recommencer les calculs plusieurs fois. Quelle est la valeur de stabilisation de ce graphe ? Justifier la réponse.

Version « scilab » ou équivalent de la Troisième partie

9 - Engendrer des valeurs prises par les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_{10000}$, calculer les fréquences d'apparition du 1 dans cette suite du rang 1 au rang n, $n = 1, \ldots, 10000$, représenter graphiquement la suite de ces fréquences ainsi que la parallèle à l'axe des abscisses d'ordonnée $\frac{1}{2}$ et conclure.