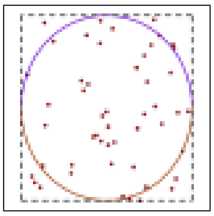


Calcul approché d'une aire par la méthode de Monte-Carlo

TS

Fiche professeur

Auteur : Raymond Moché

Cette fiche comprend une solution et des commentaires.

But de l'activité : On calcule approximativement l'aire d'un ovale dans un cas qui ne se ramène pas à une recherche de primitives en utilisant la méthode de Monte-Carlo basée sur des tirages au hasard et indépendants de points dans un rectangle contenant l'ovale ; on compare le résultat avec celui que donne une calculatrice programmable.

Pré-requis :
- ✓ Géométrie : calculs de distance
- ✓ Calcul des probabilités : loi des grands nombres, stabilisation des fréquences
- ✓ Algorithmique : programmation sur calculatrice : boucle « pour », test conditionnel « si », calcul d'une intégrale définie

Matériels utilisés :
- ✓ Calculatrices programmables
- ✓ Pour le professeur, un ordinateur équipé de « scilab » et un vidéoprojecteur seraient très utiles sans être indispensables.

Durée indicative : 1h - 1h30

Nom du logiciel éventuellement utilisé : « scilab »

Documents utiles à télécharger :
- ✓ « Fiche Élève » (pdf),
  « Fiche Professeur » (pdf),
  algorithme « CalculsProf »(format sce).
- ✓ Éventuellement, pour le professeur, algorithme « CalculsProf »(format sce)

Déroulement de la séance : Tout peut se faire en classe, mais évidemment, on pourrait remplacer l'utilisation de calculatrices par l'utilisation d'un logiciel de calcul numérique comme « scilab », auquel cas cette activité se ferait en salle informatique. Il faudrait éviter de passer beaucoup de temps sur les 3 premières questions qui sont de l'analyse. L'ovale (mot pris au sens commun) n'est pas un cercle. C'est la question **4** qui est intéressante. Ne pas oublier de refaire les calculs plusieurs fois afin d'obtenir plusieurs approximations de l'aire calculée.

Commentaire général : Ce problème est une illustration du calcul approché d'intégrales par la méthode de Monte-Carlo. Il est très facile de simuler un point suivant la loi uniforme sur un rectangle $[a, b] \times [c, d]$: il suffit - comme nous le dit notre intuition - que son abscisse suive la loi uniforme sur $[a, b]$, que son ordonnée suive la loi uniforme sur $[c, d]$ et que l'abscisse et l'ordonnée soient indépendantes. Il est également intuitivement évident que si X désigne un nombre aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ tel qu'en produit la fonction « rand » des calculatrices par exemple, $(b - a)X + a$ suit la loi uniforme sur $[a, b]$. Enfin, on admettra que si on appelle $2n$ fois la fonction « rand » pour produire n points au hasard, ces points sont indépendants. Ainsi, à l'aide d'une calculatrice, par exemple, on saura engendrer des points indépendants uniformément répartis sur un rectangle quelconque.
On admettra que la probabilité pour qu'un tel point M tombe dans une région d'aire α contenue dans le rectangle, événement noté (E), est égale à

$$P(E) = \frac{\alpha}{(b - a)(d - c)}$$

(elle est proportionnelle à l'aire, par définition de la répartition uniforme sur le rectangle et le coefficient de proportionnalité est nécessairement $\frac{1}{(b - a)(d - c)}$ puisque la probabilité de l'événement certain, à savoir « le point tiré tombe dans le rectangle » est 1). On voit que si l'on sait évaluer la probabilité que M tombe dans la région en question, on en déduira l'aire de ladite région.
Or la loi des grands nombres nous permet de trouver des valeurs approchées de cette probabilité, grâce à la suite des fréquences relatives des réalisations de (E). C'est le principe de la méthode de Monte-Carlo.

Solution

1.a - Il suffit de savoir calculer la distance de 2 points.

1.b - Le point de coordonnées $(1+X, y)$ appartient à (E) si et seulement si le point de coordonnées $(1-X, y)$ appartient à (E). La droite $x = 1$ est donc un axe de symétrie de (E). L'axe des abscisses étant un axe de symétrie évident, leur intersection $(1, 0)$ est centre de symétrie, puisqu'ils sont perpendiculaires.

2.a - Il est clair que

$$\begin{aligned}(x,y)\in(C) &\iff (y^2+(X^2+1))^2 = 4(34-X^2)\\ &\Longrightarrow \begin{cases}-\sqrt{34}\leqslant X\leqslant\sqrt{34}\\ y^2 = 2\sqrt{34-X^2}-(X^2+1)\end{cases}\end{aligned}$$

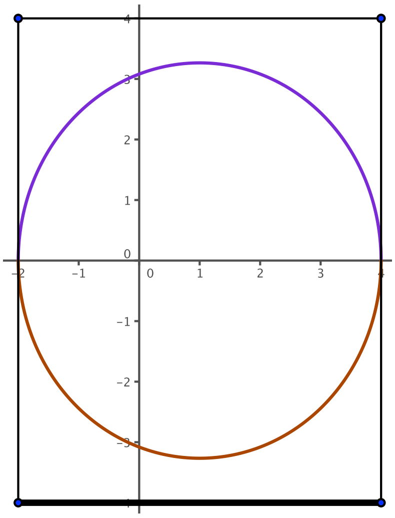
La fonction $X \mapsto 2\sqrt{34-X^2}-(X^2+1)$ est paire ; de plus, sur $[0, \sqrt{34}]$, elle est la différence d'une fonction strictement décroissante et d'une fonction strictement croissante qui s'annule pour $X = 3$. Elle décroît donc strictement de $2\sqrt{34}-1$ à 0 quand X varie de 0 à 3 et est < 0 ensuite. En résumé,

$$(x,y)\in(E) \Longrightarrow \begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 4\\ y^2 = 2\sqrt{34-X^2}-(X^2+1)\end{cases}$$

La réciproque consiste à remonter les calculs.

Que (C) soit la réunion des 2 graphes est évident. La plus grande valeur prise par la fonction f est $\sqrt{2\sqrt{34}-1} \leqslant 4$. Le graphe de (C) est donc contenu dans (R).

2.b - La figure qui suit a été construite avec « GeoGebra » :



Commentaire : Les tracés (C) et (R) avec une calculatrice sont moins beaux. La calculatrice s'impose à cause des calculs à programmer (il eut été plus agréable et plus efficace d'utiliser un logiciel de calcul comme « scilab »).

Remarque : On a utilisé « Geogebra » pour de simples raisons esthétiques. On peut évidemment se contenter du tracé fourni par la calculatrice.

3 - En utilisant la fonction « fnint » de la « TI-83 Plus », on trouve

$$\beta \approx 15,41013592, \quad \text{donc} \quad \alpha \approx 30,82027184.$$

4.a - Par définition de la loi de probabilité uniforme sur (S), $P(\mathcal{E}) = \dfrac{\beta}{24}$ puisque l'aire de (S) est 24.

4.b - D'après la loi des grands nombres, $F_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} P(\mathcal{E})$. Par conséquent, f_n désignant la valeur de F_n calculée après réalisation des n tirages, $24\cdot f_n$ pourra être utilisée comme une valeur approchée de β lorsque n est grand (ce qui est très vague).

Commentaire Malheureusement, la méthode de Monte-Carlo ne permet pas de majorer sûrement l'erreur que l'on fait en choisissant $24\cdot f_n$ comme valeur approchée de β. Des résultats théoriques montrent que la convergence moyenne de $24 * F_n$ vers β est lente. La méthode de Monte-Carlo est quand même intéressante car elle fonctionnerait même si f était une fonction très irrégulière. De telles fonctions sont hors-programme.

4.c - Pour simuler les points, on peut utiliser le programme suivant, écrit pour une « TI-83 Plus » :

PROGRAMME : CARLO

: “$\sqrt{}(2\sqrt{}(34-(X-1)^2)-((X-1)^2+1))$” $\to Y_1$

: Input N

: seq$(6*\text{rand}-2, A, 1, N) \to L_1$

: seq$(4*\text{rand}, A, 1, N) \to L_2$

: seq$(0, A, 1, N) \to L_3$

: For$(I, 1, N)$

: If $Y_1(L_1(I)) \geq L_2(I)$

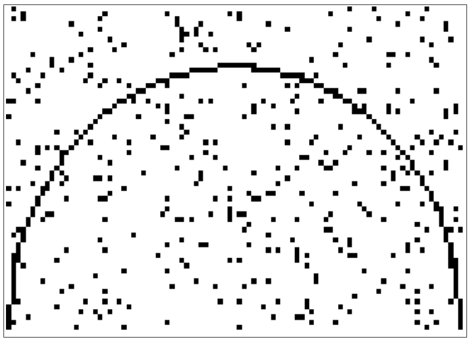
: $1 \to L_3(I)$

: End

: Disp $24 * \text{sum}(L_3)/N$

: prgmCARLO

Le graphe que l’on obtiendra aura l’aspect suivant :



4.d et **4.e** - Pour nos tirages, nous avons trouvé successivement comme valeur approchée de α par la méthode de Monte-Carlo : 29.952, 30.624 et 30.144. On constate comme d’habitude que les résultats d’expériences aléatoires fluctuent.

Solution par « scilab »

On peut utiliser un logiciel comparable à « scilab ». Cela rend la programmation plus agréable, les graphes plus précis et plus jolis et augmente considérablement les possibilités de calcul. Voir l’algorithme qui est commenté. Voici les graphes obtenus en tirant 10000 points et en ne faisant apparaître que les 100 premiers :