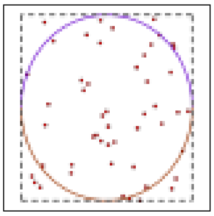

Calcul approché d'une aire par la méthode de Monte-Carlo

TS

Fiche Élève

Auteur : RM

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$. On se donne le point A de coordonnées $(2{,}0)$ et on considère l'ensemble (C) des points M du plan tels que

$$MO^4 + MA^4 = 272. \tag{1}$$

Dans la suite, M désigne le point général du plan de coordonnées (x,y).

1.a - Démontrer que le point M appartient à (C) si et seulement si

$$(x^2+y^2)^2 + ((x-2)^2+y^2)^2 = 272 \tag{2}$$

1.b - Si l'on pose $x = 1+X$, on constate que le point M appartient à (C) si et seulement si

$$((1+X)^2+y^2)^2 + ((1-X)^2+y^2)^2 = 272 \tag{3}$$

En déduire que la droite d'équation $x=1$ est un axe de symétrie de (C), puis que le point O' de coordonnées $(1{,}0)$ est un centre de symétrie de (C).

2.a - Démontrer que

$$M \in (C) \iff -2 \leqslant x \leqslant 4 \quad \text{et} \quad y^2 = 2\sqrt{34-X^2} - (X^2+1) \tag{4}$$

En déduire que l'ensemble (C) est la réunion des graphes des deux fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto -f(x)$, $x \in [-2{,}4]$, où

$$f(x) = \sqrt{2\sqrt{34-(x-1)^2} - ((x-1)^2+1)} \tag{5}$$

et qu'il est contenu dans le rectangle $(R) = [-2\,,4] \times [-4\,;\,4]$.

2.b - Tracer (C) et (R) avec une calculatrice programmable ou un logiciel de géométrie.

3 - On voit que (C) est une courbe fermée qui partage le rectangle (R) en 3 régions : (C), l'intérieur de (C) et son extérieur. Nous désirons calculer l'aire α de

$$(D) = (M\,;\, -2 \leq x \leq 4\,, |y| \leq |f(x)|),$$

qui est la réunion de (C) et de son intérieur. Compte tenu de la symétrie de la figure par rapport à l'axe des abscisses, $\alpha = 2\cdot\beta$, où β est l'aire de la surface (Δ) comprise entre le graphe de f et l'axe des x. Calculer β et α à l'aide de la calculatrice.

4 - On veut maintenant approcher β par la méthode de Monte-Carlo, en tirant des points au hasard indépendants les uns des autres dans le rectangle $(S) = [-2\,;\,4] \times [0\,;\,4]$. Dire que ces points sont tirés au hasard dans (S) signifie que leur abscisse et leur ordonnée sont indépendantes et suivent respectivement la loi uniforme sur $[-2\,;\,4]$ et sur $[0\,;\,4]$. On va étudier la fréquence de réalisation de l'événement

$(\mathcal{E})$ = « le point tiré tombe dans (Δ) ».

4.a - Quelle est la probabilité $P(\mathcal{E})$ de l'événement $(\mathcal{E})$, exprimée à l'aide de β ?

4.b - À l'aide de la fonction « rand » de la calculatrice, on a l'intention de simuler le choix de n points au hasard dans (S). On note N_n le nombre de fois que $(\mathcal{E})$ est réalisé et on pose

$$F_n = \frac{N_n}{n} \tag{6}$$

F_n est la fréquence de réalisation de l'événement $(\mathcal{E})$ au cours des n tirages. C'est une variable aléatoire. Que peut-on dire de F_n et de β ?

Commentaires : C'est cette remarque qui est à la base du calcul approché d'une intégrale par la méthode de Monte-Carlo. Cette méthode n'utilise pas de calcul de primitive !

4.c - Simuler le tirage au hasard de 500 points dans (S) ; faire apparaître (S), le graphe de la fonction f et les points tirés.

4.d - En déduire la valeur de F_{500} qui correspond à ces tirages et proposer une valeur approchée de β et de α.

4.e - Recommencer deux fois ces 500 tirages pour avoir deux nouvelles valeurs approchées de α par la méthode de Monte-Carlo.

Commentaires : La méthode de Monte-Carlo a l'inconvénient de converger lentement (il faut tirer énormément de points au hasard pour avoir de bonnes approximations des intégrales). Par contre, elle est extrêmement générale.