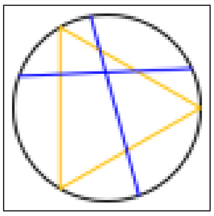


Le paradoxe de Bertrand

Fiche professeur

TS & ES

Auteur : Raymond Moché

But de l'activité : Algorithmique, probabilités, modélisation, simulation. P et Q étant deux points choisis au hasard sur un demi-cercle, on estime la probabilité de l'événement « la longueur de la corde PQ est supérieure ou égale à la longueur d'un côté de triangle équilatéral inscrit dans le cercle ». On considère deux interprétations de l'expression « P et Q sont choisis au hasard » qui conduisent en fait à deux problèmes de Calcul des probabilités différents. Cette activité s'appuie sur la stabilisation des fréquences d'un événement lors de répétitions d'une expérience aléatoire. Elle repose aussi sur deux algorithmes plutôt simples. Enfin, c'est un joli exemple de probabilités géométriques, c'est à dire de problème de probabilités que l'on résout à l'aide que considérations géométriques.

Compétences engagées :

✓ Modélisation et simulation, répétition d'expériences aléatoires identiques et indépendantes (cette activité peut aider à faire deviner aux élèves à quel point les problèmes de modélisation sont habituellement complexes. Le professeur pourra leur donner quelques références supplémentaires sur le paradoxe de Bertrand, voir ci-dessous.),

✓ Lois continues à densité : loi uniforme sur $[0\,,\,1]$,

Pré-requis :

✓ **Calcul des probabilités** : Loi des grands nombres, stabilisation des fréquences, lois continues à densité.

✓ **Algorithmique** : Boucle « pour », utilisation de « plot »(si nous nous référons à « scilab »), compteur.

Logiciels utilisés :

✓ « scilab » ou un logiciel de calcul équivalent.

Durée indicative : 1 heure. L'activité se compose de deux parties qui ne sont pas indépendantes mais peuvent être traitées indépendamment. Il est important de comparer les résultats obtenus, quitte à en admettre un.

Documents utiles à télécharger :

« Fiche Élève » au format pdf (énoncé),
« Fiche Professeur », même format (commentaires, solution),
« Calculs 1 » et « Calculs 2 » (algorithmes « scilab » des deux parties), au format sce.

Solution et commentaires :

Le professeur peut provoquer une discussion sur le thème : comment choisir un point au hasard sur un cercle ? Les élèves se rendront peut-être compte que c'est difficile (impossible dans la pratique) : peut-on placer tous les points d'un cercle dans un chapeau et en choisir un au hasard ? Vaste problème !

1 - M doit se trouver sur l'arc $\overset{\frown}{A'B}$. On peut éventuellement demander une démonstration.

2 - L'expression « choisi au hasard » est prise au sens usuel, c'est à dire que α est tiré suivant la loi uniforme sur $[0, \pi]$. C'est l'exécution de la commande « $\pi * rand$ » (ou une commande équivalente) qui fournit un tel nombre, dans les logiciels de calcul comme « scilab ».

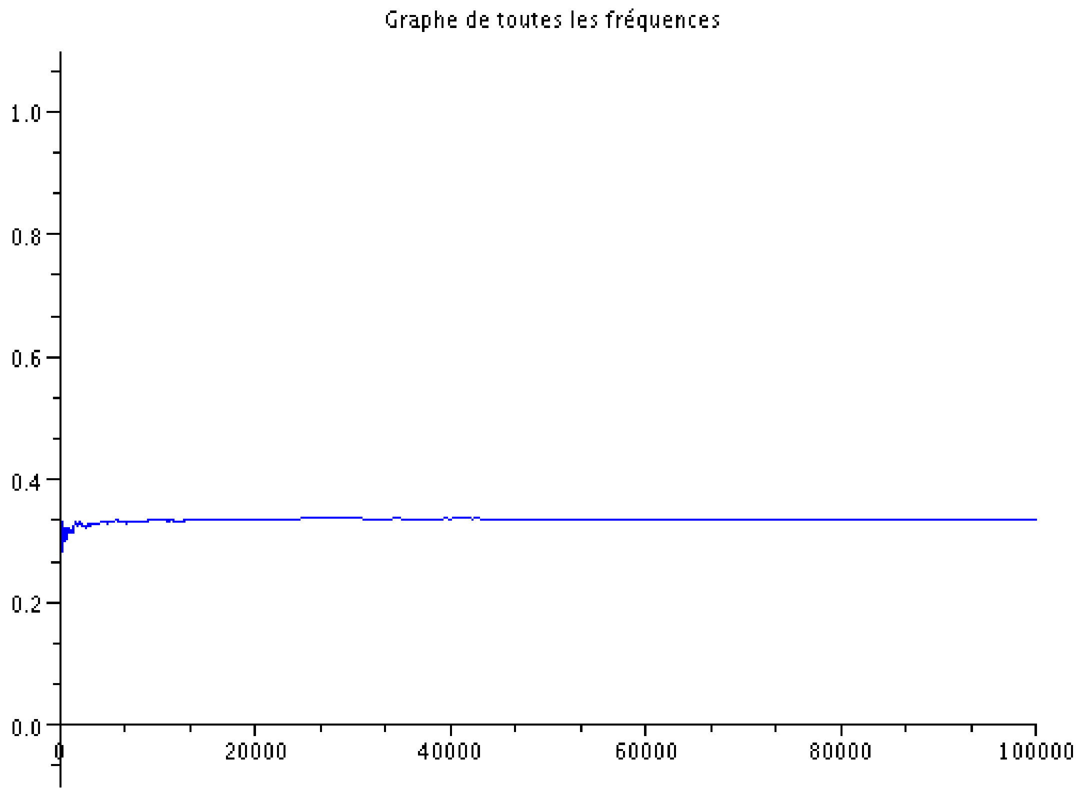
2.a - L'événement E est l'événement « $\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \pi$ ».

2.b - Sa probabilité est donc $p = \frac{1}{3}$.

3 - Nous proposons l'algorithme suivant :

```
// Choisir un point au hasard sur un demi-cercle
clear
N=input("N=")//N sera le nombre de points choisis au hasard indépendamment les uns des autres.
Alpha=%pi*rand(1,N);// On choisit N valeurs de l'angle alpha qui repère M sur le cercle.
C=0;// C compte le nombre de succès
F=[];// F deviendra le vecteur des fréquences successives au cours des N expériences.
for i=1:N
  if Alpha(1,i)>2*%pi/3
    C=C+1;
  end
  F=[F,C/i];
end
clf()
plot(F)// Graphe constitué des points représentant les fréquences et reliés par des segments de droite (qui ne se voient pas).
a=gca();
a.data_bounds=[-0.1,-0.1;N+0.5,1.1];
xtitle("Graphe de toutes les fréquences")
disp("La dernière fréquence calculée est ")
F(N)
```

Voici le graphe obtenu après une exécution (qui est plutôt lente) de l'algorithme :



L'algorithme donne notamment la dernière valeur de la fréquence calculée. L'un des résultats obtenus au cours de nos essais était 0.33344. Bien sûr, il est important d'exécuter l'algorithme plusieurs fois. On obtient alors d'autres valeurs de la dernière fréquence calculée. La valeur de stabilisation exacte est $p(E)$, d'après la loi des grands nombres.

Deuxième partie

5 - E est l'événement « $\frac{2\pi}{3} \leq X \leq \pi$ ». La deuxième inégalité est automatiquement vérifiée.
Le calcul de $p(E)$ n'est pas demandé car il n'est pas possible en Terminale. Il suffit d'admettre le résultat : $p(E) = \frac{1}{9}$ [1].

1. Les variables aléatoires $-\frac{\alpha}{\pi}$ et $\frac{\beta}{\pi}$ sont indépendantes et suivent respectivement les lois uniformes sur $[-1\,,\,0]$ et $[0\,,\,1]$.

6 - Nous proposons l'algorithme suivant :

Par conséquent, la variable aléatoire $\frac{\beta}{\pi} - \frac{\alpha}{\pi}$ suit la convolée de ces deux lois, qui est la loi de densité (voir la figure 0.1 ci-dessous)

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad -1 \leq x \ \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1}$$

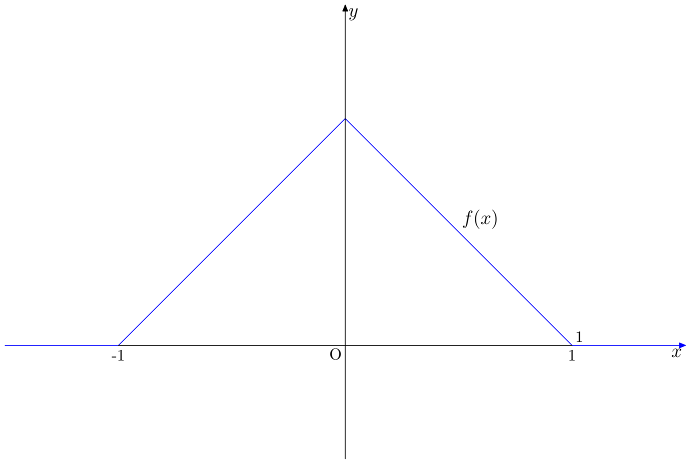


Figure 0.1

On en déduit que X suit la loi de densité (voir la figure 0.2 ci-dessous)

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi^2}(\pi - x) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2}$$

puis que

$$p(E) = P(\frac{2\pi}{3} \leq X \leq \pi) = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} g(x)\, dx = \frac{1}{9}. \tag{3}$$

Bien sûr, $p(E)$ est l'aire du triangle jaune, ce qui permet un calcul beaucoup plus rapide :

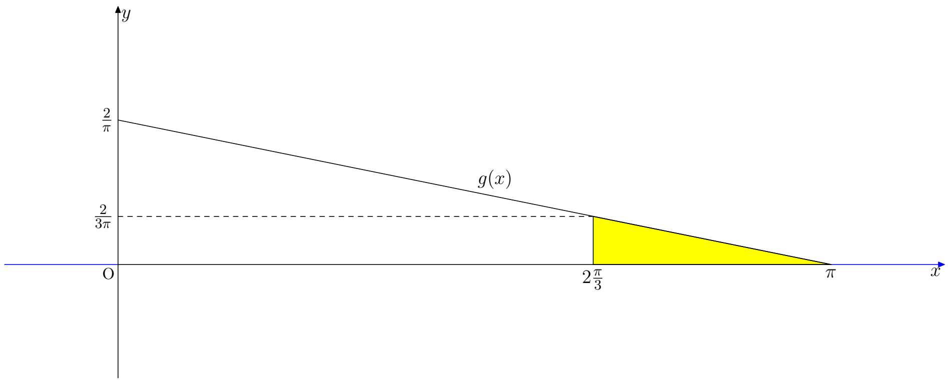
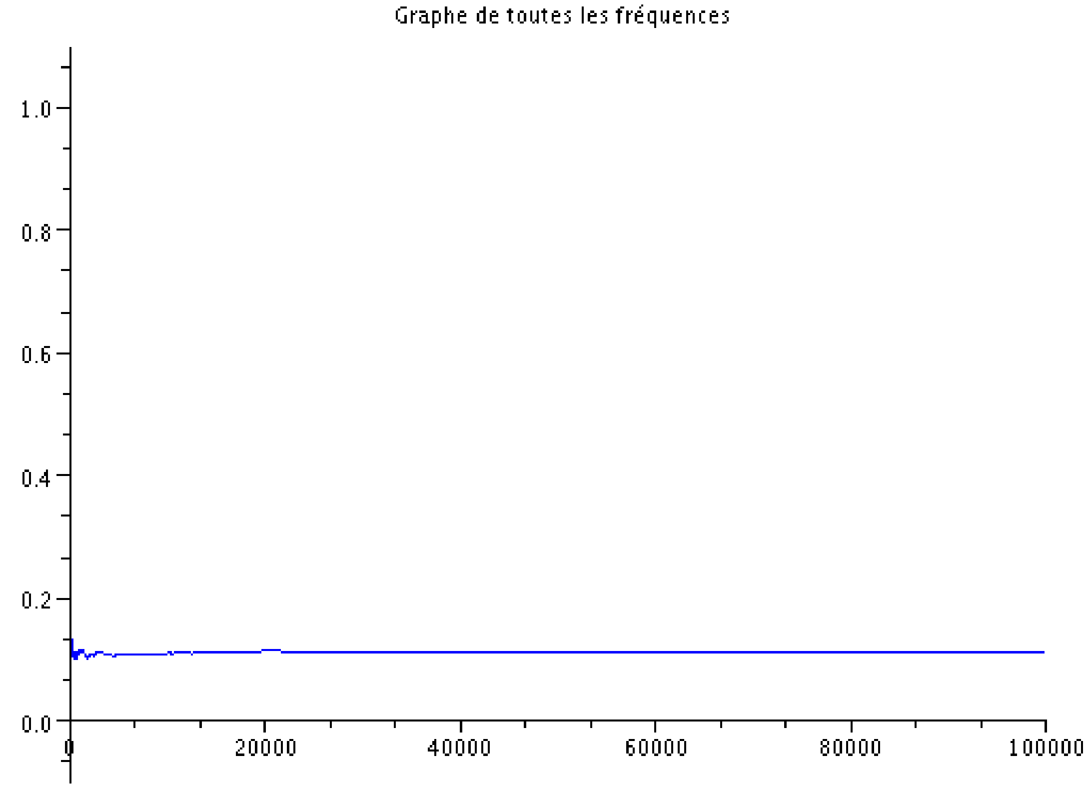


Figure 0.2

```
// Choisir un point au hasard sur un demi-cercle
clear
R=input("R=")//R sera le nombre de répétitions de l'expérience : choisir 2 points au hasard sur le demi-cercle.
Alpha=%pi*rand(1,R);// On choisit N valeurs de l'angle alpha qui repère P sur le cercle.
Beta=%pi*rand(1,R); // Idem pour les points Q.
X=abs(Beta-Alpha);
C=0;// C compte le nombre de succès
F=[];// F deviendra le vecteur des fréquences successives au cours des N expériences.
for i=1:R
  if X(1,i)>2*%pi/3
    C=C+1;
  end
  F=[F,C/i];
end
clf()
plot(F)// Graphe constitué des points représentant les fréquences et reliés par des segments de droite (qui ne se voient pas).
a=gca();
a.data_bounds=[-0.1,-0.1;R+0.5,1.1];
xtitle("Graphe de toutes les fréquences")
disp("La dernière fréquence calculée est ")
F(R)
```

Voici le graphe obtenu après une exécution de l'algorithme :



L'algorithme donne notamment la dernière valeur de la fréquence calculée. L'un des résultats obtenus au cours de nos essais était 0.11264. Bien sûr, il est important d'exécuter l'algorithme plusieurs fois. On obtient alors d'autres valeurs de la dernière fréquence calculée. La valeur de stabilisation exacte est $p(E)$, d'après la loi des grands nombres.

7 - Comme les élèves ne connaissent pas la valeur de $p(E)$, il est normal qu'ils proposent comme vraie valeur de $p(E)$ la dernière fréquence calculée ou la moyenne arithmétique des dernières fréquences calculée si l'algorithme a été exécuté plusieurs fois. Le professeur peut alors donner la vraie valeur qui est $\frac{1}{9}$, on l'a vu.

Pourquoi avons-nous modifié l'énoncé du problème de Bertrand ?

En remplaçant « cercle » par « demi-cercle » dans l'énoncé de Bertrand, nous obtenons, on l'a vu, deux valeurs différentes de $p(E)$ ($\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{9}$) dans les deux modélisations étudiées, ce qui établit qu'elles sont différentes de manière évidente. Avec l'énoncé original, nous aurions obtenu deux fois $\frac{1}{3}$. Il aurait donc fallu se fatiguer davantage pour montrer qu'il s'agit de modélisations différentes. En fait, c'est difficile avec les moyens autorisés en Terminale.

Références :

Les articles concernant le paradoxe de Bertrand sont nombreux sur la Toile. Citons :

1. « Choisir un point au hasard sur un cercle », activité proposée sur ce site pour la classe de 3ème. C'est la première partie de « Paradoxe de Bertrand ». La simulation est faite avec le tableur d'OOo, les formules utilisées étant pré-installées.

   `http://gradus-ad-mathematicam.fr/3emeProba3.htm`

2. Article « Joseph Bertrand » de Wikipedia,

   `http://fr.wikipedia.org/wiki/Joseph_Bertrand`

3. Article « Paradoxe de Bertrand » de Wikipedia,

   `http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_de_Bertrand`

4. « Calcul des probabilités » de Joseph Bertrand, Gauthier-Villars, Paris (1889) ; fac-similé disponible sur « Gallica », bibliothèque numérique de la BNF,

   `ftp://ftp.bnf.fr/009/N0099602_PDF_1_-1DM.pdf`

5. Site « Mathématiques magiques » de Thérèse Éveilleau, article « Paradoxe de Bertrand »,

   `http://pagesperso-orange.fr/therese.eveilleau/`

   Sur le site « Mathématiques magiques », trois interprétations du problème de Bertrand sont proposées. Ces 3 interprétations sont celles que Bertrand propose dans son livre (pp. 4 et 5). Elles sont acceptables mais moins naturelles que l'interprétation présentée dans la deuxième partie de notre activité, qui est ignorée par ces auteurs et qui est, pour moi, la « bonne » modélisation du problème de Bertrand. La première modélisation de « Mathématiques magiques » est aussi celle de notre première partie (à la variation cercle/demi-cercle près).

   Une quatrième interprétation est suggérée dans « Mathématiques magiques ». Elle est carrément à rejeter car connaître la longueur d'une corde ne permet pas de tracer cette corde. On peut programmer les interprétations 1, 2 et 3 de ce site, en produisant une corde, pas la dernière. Remarquons que simuler le choix d'un point au hasard (c'est à dire suivant la loi uniforme) sur un disque n'est pas évident.

6. Extrait des programmes officiels : Programme de l'enseignement des mathématiques en classe terminale de la série scientifique, BO n°4 du 30 août 2001, Hors-série, p. 69

   `http://www.education.gouv.fr/bo/2001/hs4/default.htm`